第2章 *电路的若干定理* (Circuit Theorems)

2.5 齐次定理（*homogeneity Theorem*）与叠加定理 (*Superposition Theorem*)

2.6 替代定理 (*Substitution Theorem*)

2.7 戴维南定理和诺顿定理 (*Thevenin−Norton Theorem*)

2.8 *特勒根定理 (*Tellegen's Theorem*)与互易定理 (Reciprocity Theorem)

2.9 *对偶原理 (*Dual Principle*)

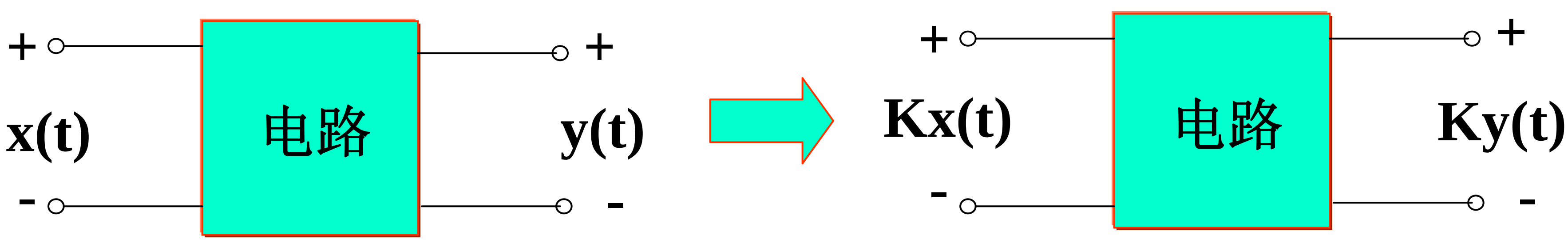
1 叠加定理 (*Superposition Theorem*)

一、线性电路的齐次性和叠加性

线性电路：由线性元件和独立源构成的电路。

1.齐次性（homogeneity)(又称比例性，proportionality)

齐次性：若输入x(t) → 响应y(t)，则输入K x(t) → Ky(t)



2.叠加性（superposition)

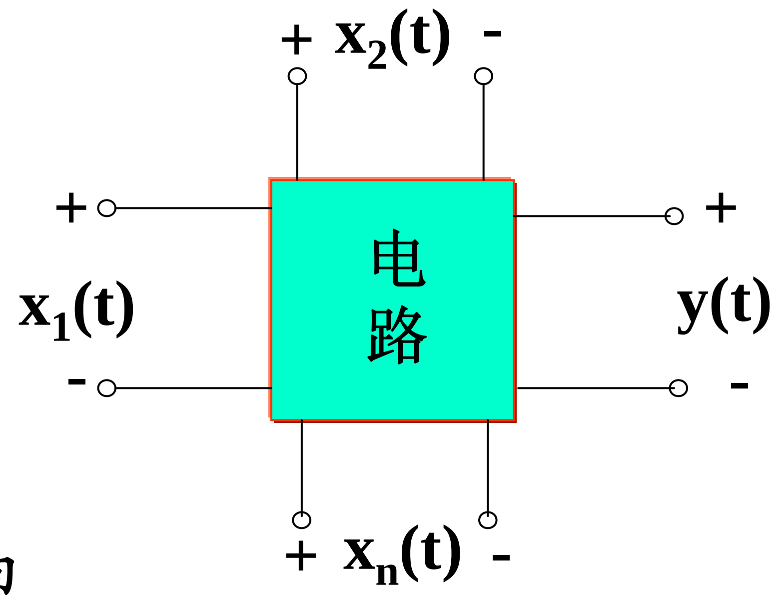
若输入$x_1(t) \to y_1(t)$(单独作用），

$x_2(t) \to y_2(t)$

…

$x_n(t) \to y_n(t)$

则$x_1(t)$、$x_2(t)$ … $x_n(t)$ 同时作用时响应$y(t)= y_1(t)+ y_2(t)+ \ldots +y_n(t)$



注: $x_1(t) \ldots x_n(t)$ 可以是不同位置上的激励信号

3.线性=齐次性+叠加性

若输入 $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$(单独作用）

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

…

$x_n(t) \rightarrow y_n(t)$

则：

$$K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) + \ldots + K_n x_n(t) \rightarrow K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) + \ldots + K_n y_n(t)$$

注：齐次性是一种特殊的叠加性。

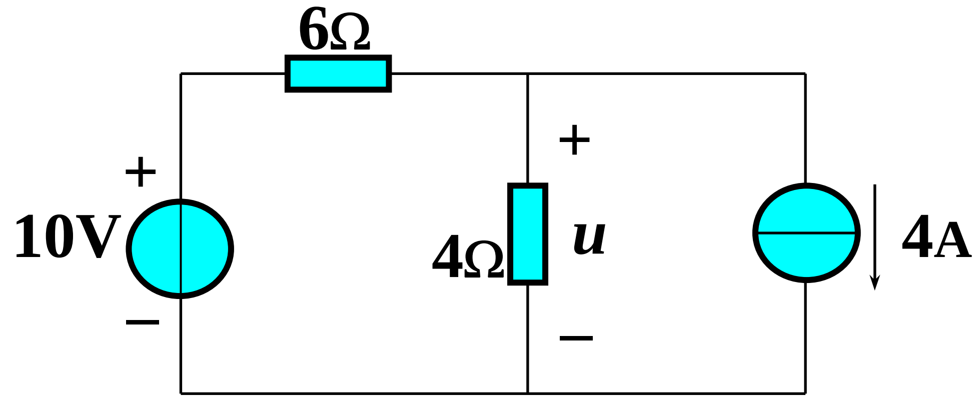
故，线性电路的根本属性是叠加性

叠加定理： 在线性电路中，任一支路电流(或电压)都可以看成是电路中各个独立源分别单独作用时，在该支路产生的电流(或电压)的代数和。

注： 一个独立源单独作用，其余独立源需置零。

- 电压源置零—视为短路。
- 电流源置零—视为开路。

例1. 求图中电压u



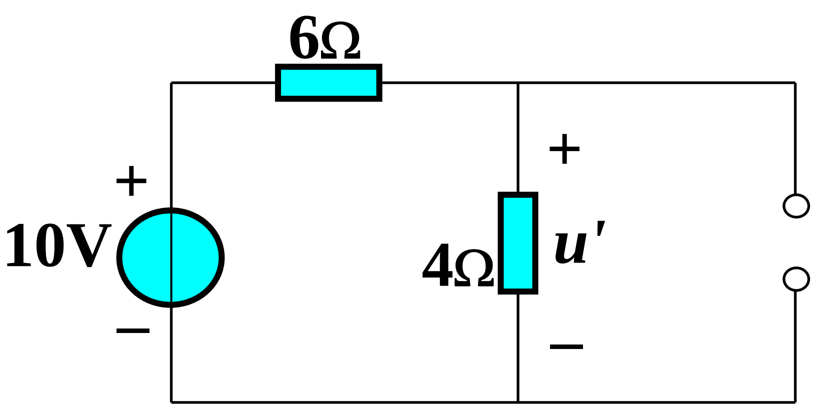
解: (1) 10V电压源单独作用，4A电流源开路（图a）

$$u'=4V$$

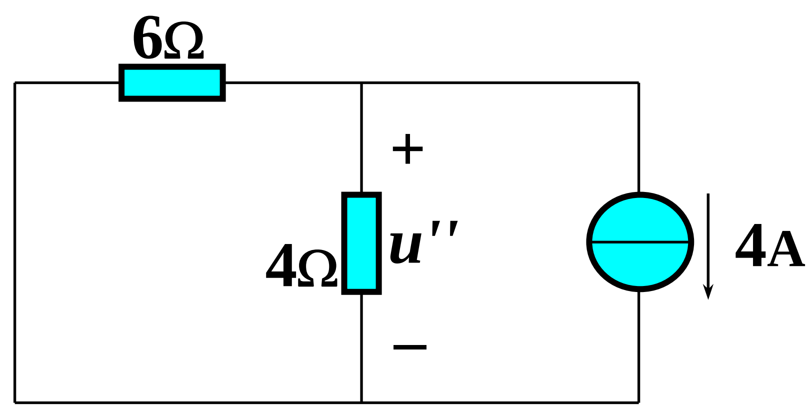
(2) 4A电流源单独作用，10V电压源短路（图b）

$$u''= -4\times(6//4) = -9.6V$$

共同作用：$u=u'+u''= 4+(-9.6)= -5.6V$

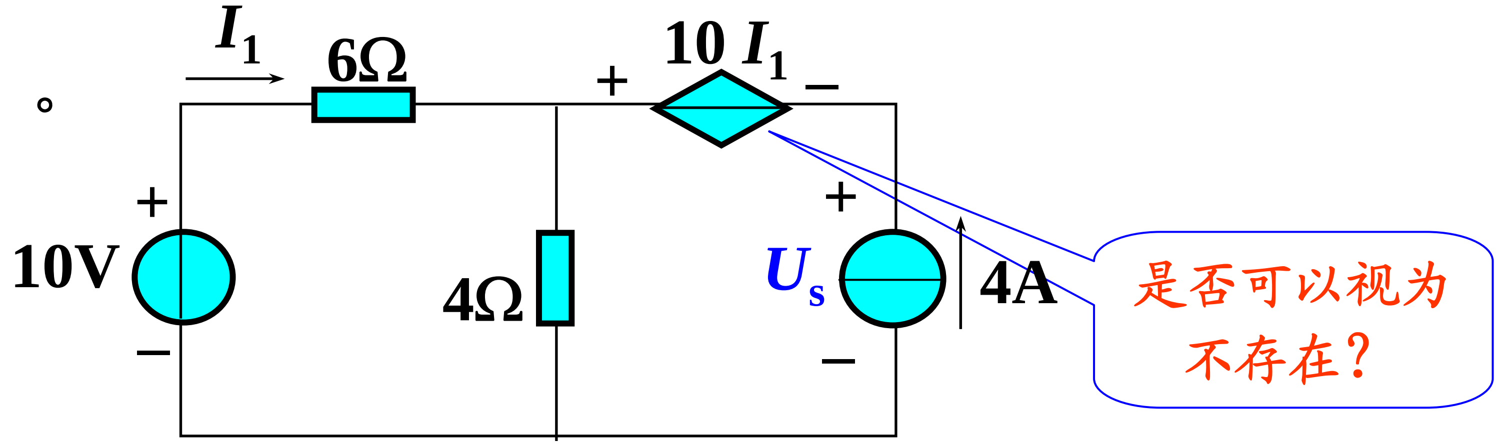


（图a）

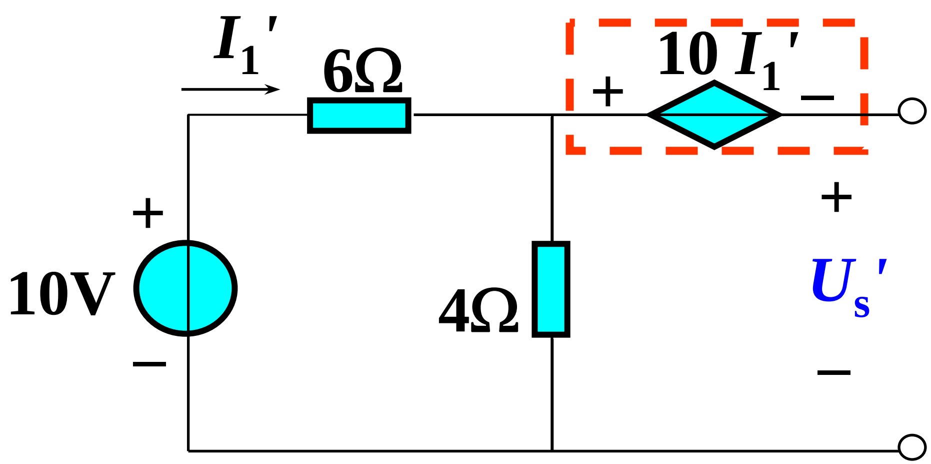


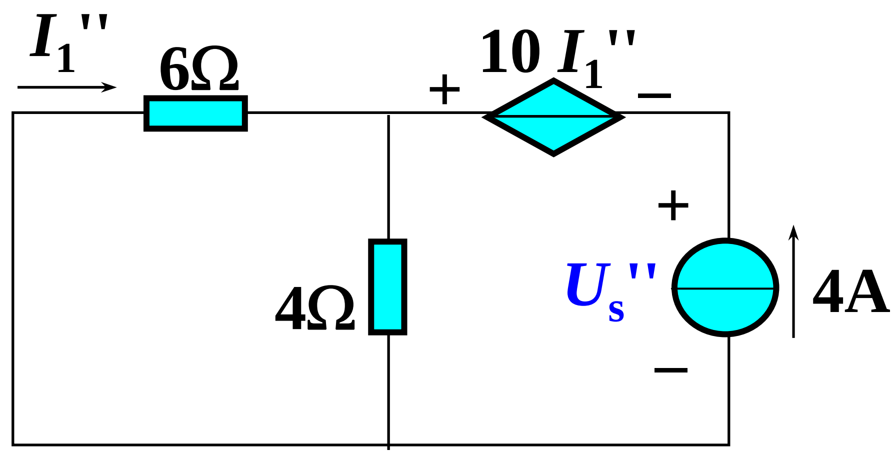
（图b）

例2. 求电压U_s 。



解: (1) 10V电压源单独作用： (2) 4A电流源单独作用：





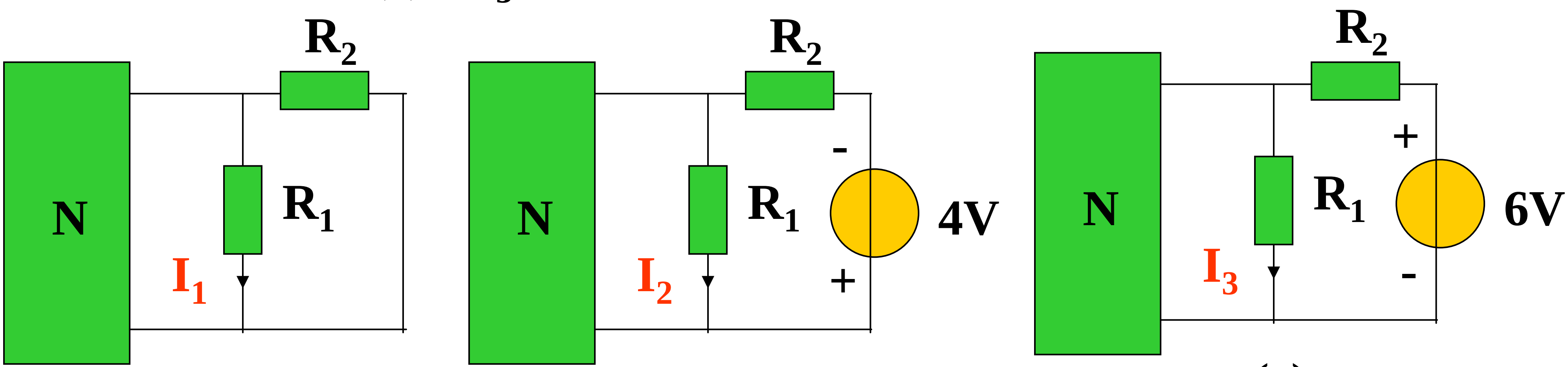
$U_s' = -10\,I_1' + 4 = -10\times1+4 = -6\text{V}$

$U_s'' = -10I_1'' + (6//4)\times4$

$= -10\times(-1.6)+9.6 = 25.6\text{V}$

共同作用： $U_s = U_s' + U_s'' = -6+25.6 = 19.6\text{V}$

例： 如图，N为线性含源电阻网络，(a)中I_1=4A，(b)中I_2= –6A，求 (c)中I_3=?



(a) (b) (c)

解：(a) 中仅由N内独立源单独作用时 I_1=4A

(b) 中由N内独立源和4V电源共同作用时 I_2= –6A

故仅由 4V电源单独作用时R_1支路电流 I_2' = –6-4= –10A

若仅由(c)中6V电源单独作用时R_1支路电流 I_3' = 15A

故(c)中电流$I_3 = I_1 + I_3'$ =4+15=19A

小结：

1. 叠加定理只适用于线性电路。

2. 某独立源单独作用，其余独立源置零 $\begin{cases} \text{零值电压源——短路。} \\ \text{零值电流源——开路。} \end{cases}$

3. 功率不能叠加(功率为电源的二次函数)。

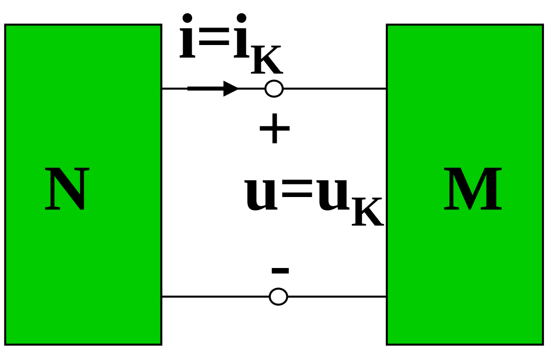
4. *u*,*i*叠加时要注意各分量的方向。

5. 受控源不能单独作用。某独立源单独作用时，受控源应始终保留。

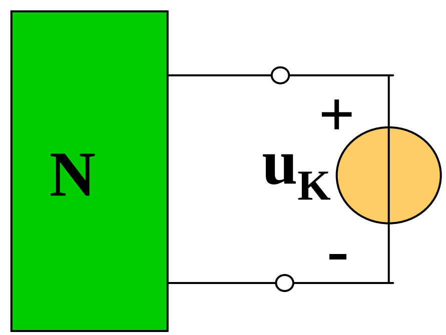
2 替代定理 (*Superposition Theorem*)

替代（置换）定理:

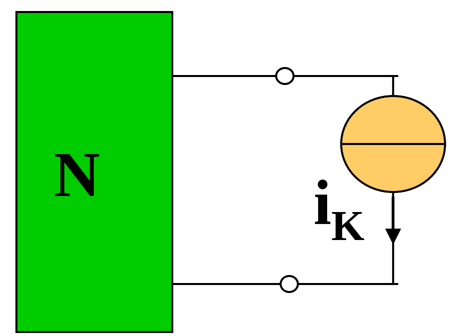
含独立源的任意网络中，若已知其中某一单口网络（或某一支路）的电压和电流分别为u_K和i_K，则可将此单口网络（或支路）用u_K电压源或i_K电流源替代。若替代后网络仍有唯一解，则原网络中其它部分电压电流分配不变。



(a) 原网络



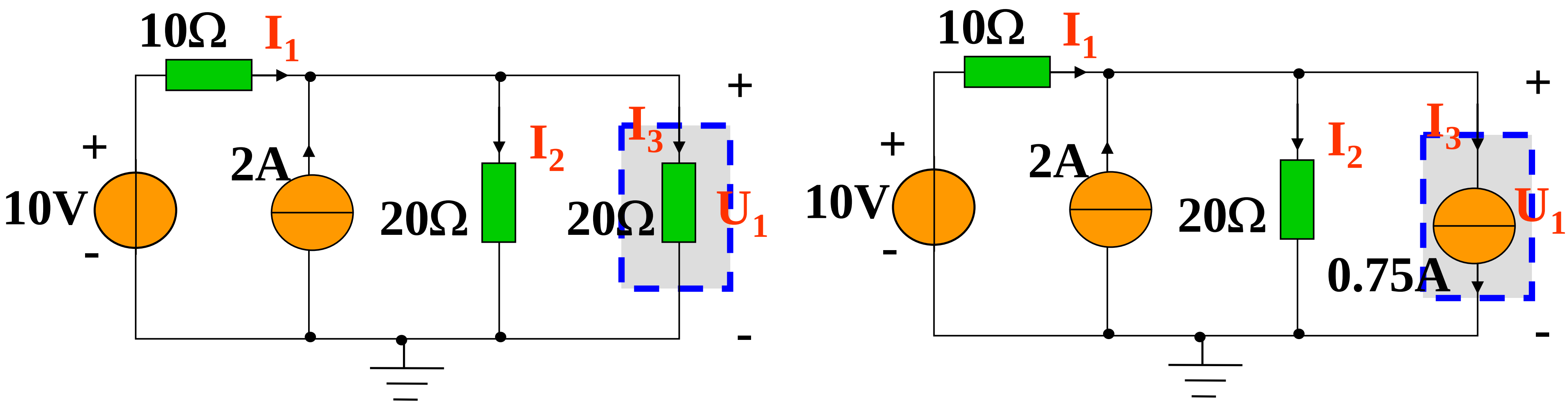
(b) M被u_K电压源替代



(c) M被i_K电流源替代

注:被替代部分N与M中应无耦合关系

例：如图(a)电路，运用节点法可以求得I_1= -0.5A，I_2=0.75A，I_3=0.75A，U_1=15V。运用替代定理将I_3支路用0.75A电流源替代如图(b)，试验证其余各支路电流、电压不变。



(a)　　　(b) 替代后

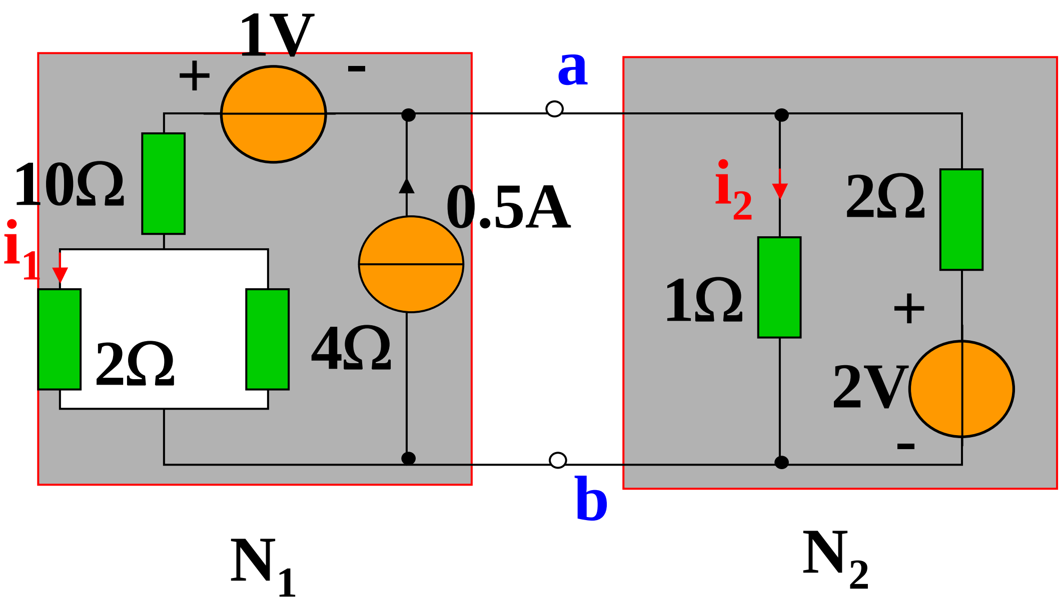
解：　由图(b)得：　$(0.1+0.05)U_1=(10/10)+2-0.75$　（节点方程）

得：　$U_1=15V$

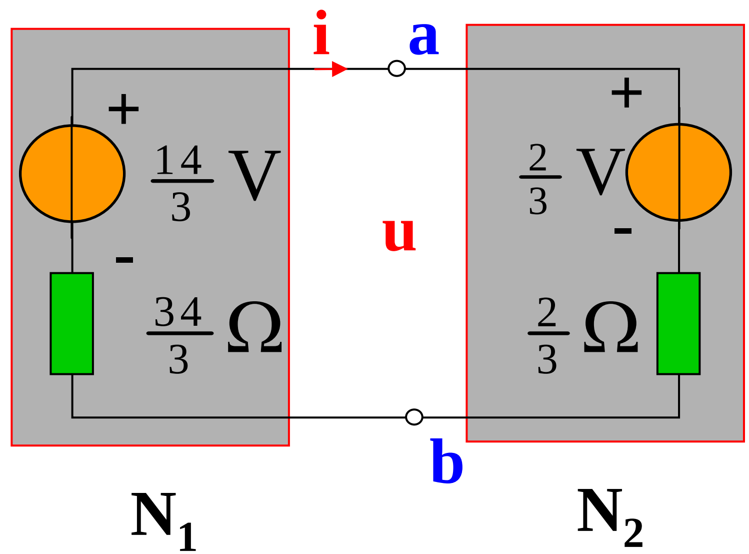
故 $I_1=(10-U_1)/10=(10-15)/10=-0.5A$　　$I_2=U_1/20=0.75A$

$I_3=0.75A$　　故替代后电压、电流分配不变。

例： 求如图(a)电路中电流i_1、i_2(分解法和替代定理）



图(a)



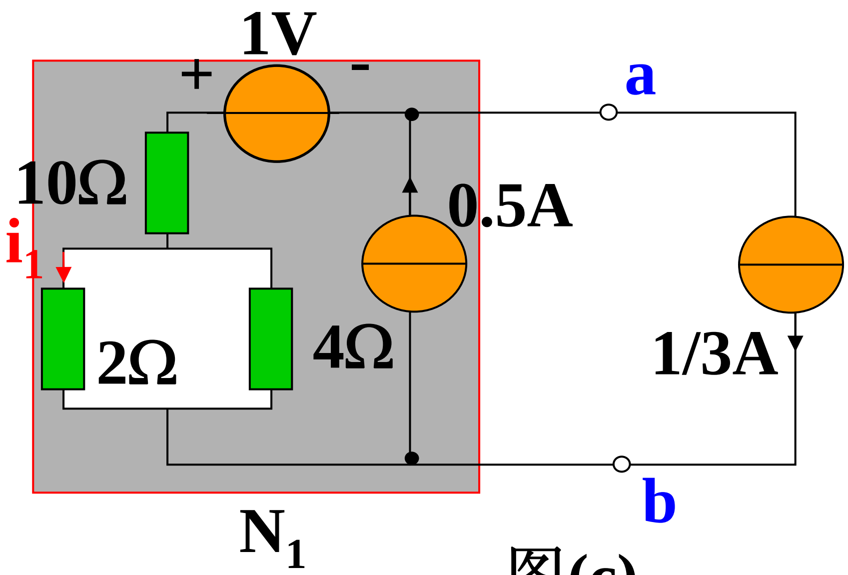
图(b)

解： (1)将原电路分解为N_1、N_2两个单口网络

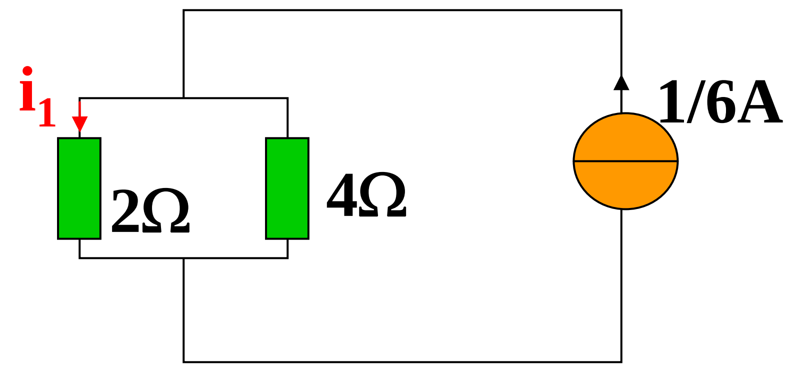
(2)为了求i，将N_1、N_2分别等效如图(b)

$$i = \left(\frac{14}{3} - \frac{2}{3}\right) / \left(\frac{34}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\text{A}$$

$$u = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = \frac{8}{9}\text{V}$$



图(c)

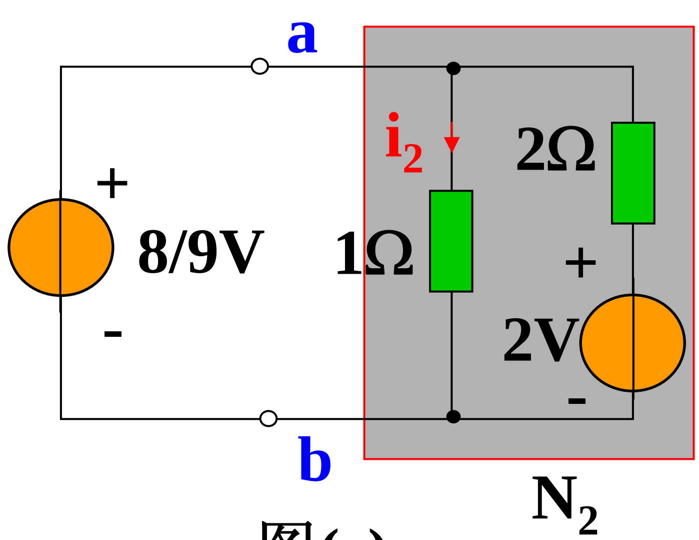


图(d)

(3) 为求i_1，将N_2用1/3A电流源替代（图(c)、(d)）

得 i_1=1/9A （分流）

(4) 为求i_2，将N_1用 8/9V 电压源替代（图(e)）

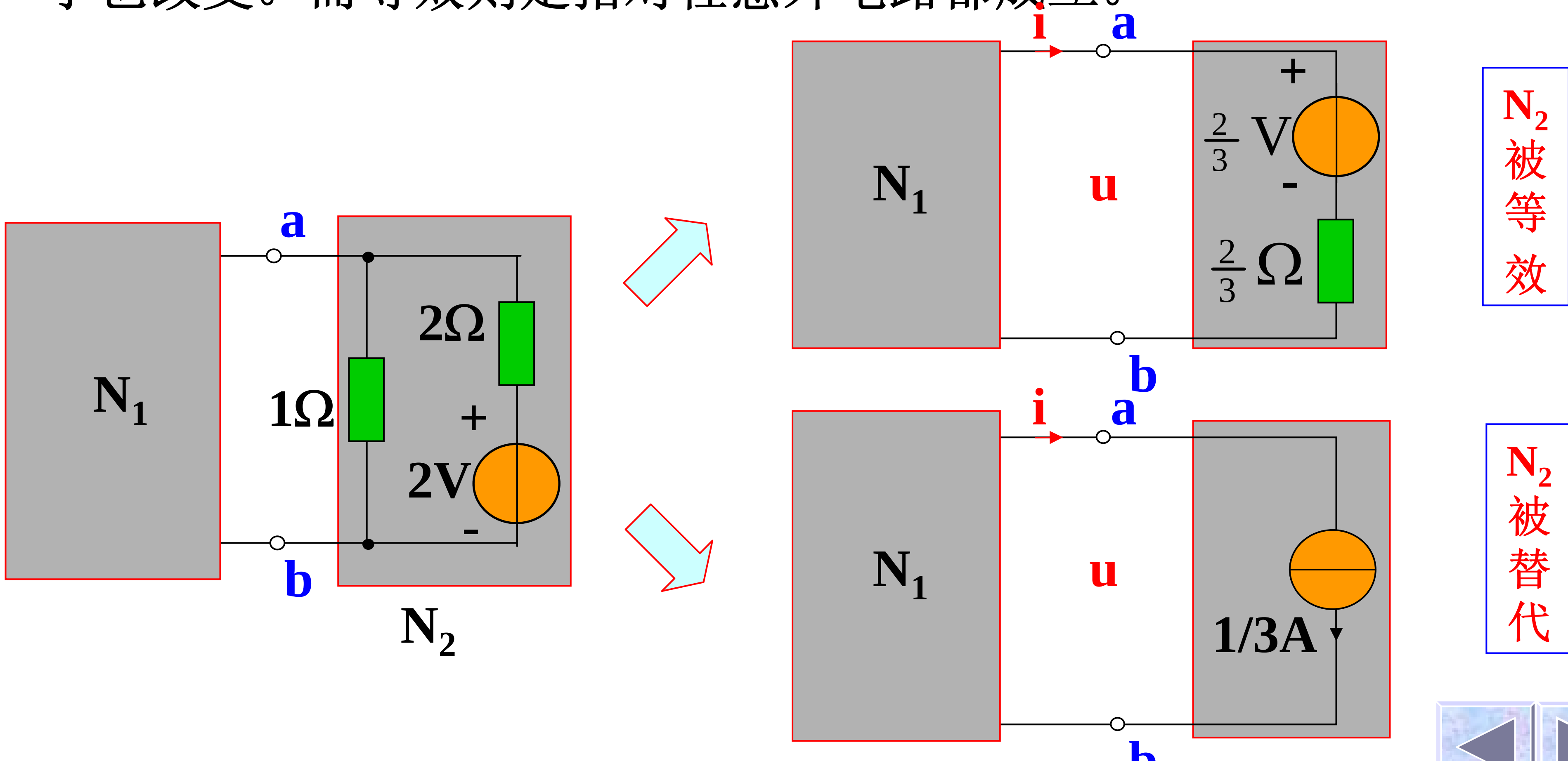


图(e)

得 i_2= 8/9 A

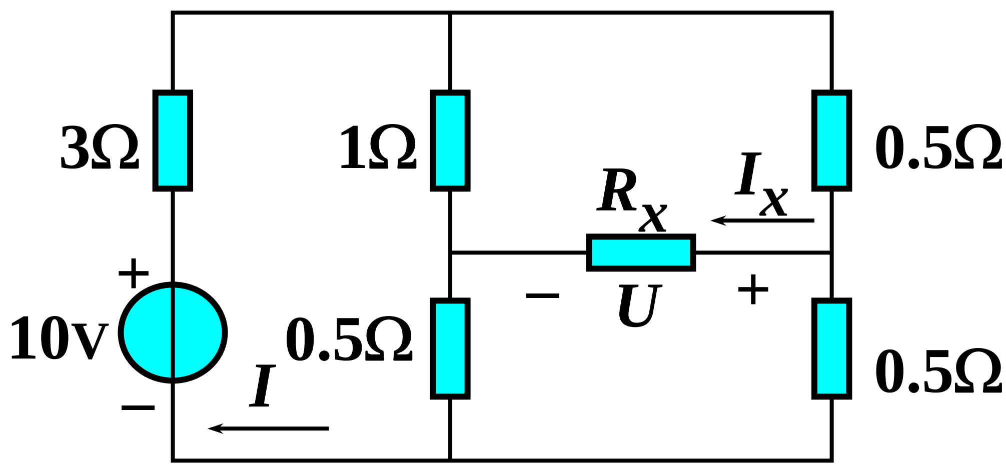
替代与等效的区别：

如前例中，N_2可用2/3V电压源串联2/3Ω电阻来等效它，也可用1/3A电流源来替代它。这时电路中其他部分电压电流分布都不变。但替代只针对特定的外电路N_1时才成立，外电路改变，替代的电流源大小也改变。而等效则是指对任意外电路都成立。



注：替代是特定条件下的一种等效（即只在一点等效）

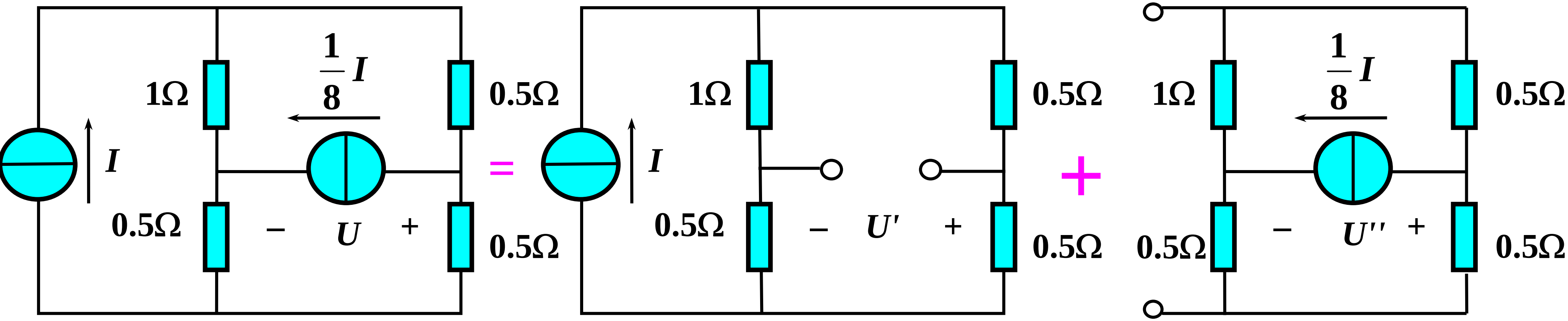
例.



若要使 $I_x = \dfrac{1}{8} I$，

试求R_x。

解：　用替代：



$$U' = \frac{1}{2.5}I \times 1 - \frac{1.5}{2.5}I \times 0.5 = 0.1I$$

$$U'' = -\frac{1.5}{2.5} \times \frac{1}{8}I = -0.075I$$

$$\boldsymbol{U = U' + U'' = (0.1 - 0.075)I = 0.025I}$$

$$R_x = \frac{U}{I_x} = \frac{U}{0.125I} = \frac{0.025I}{0.125I} = 0.2\Omega$$

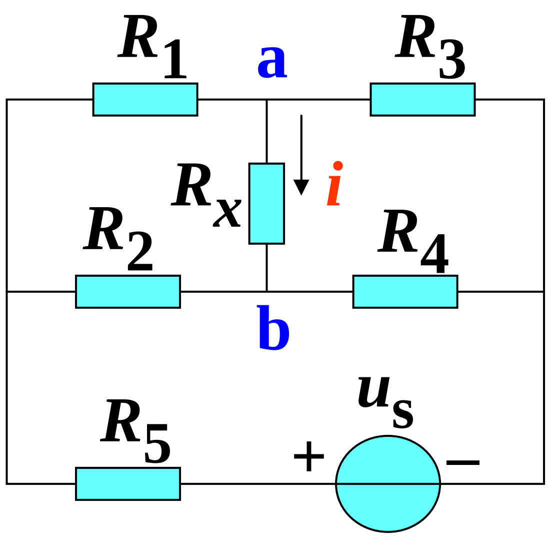
小结：

1.替代定理既适用于线性电路，也适用于非线性电路。

2. 替代后电路必须有唯一解。

3.替代后外电路及参数不能改变(只在一点等效)。

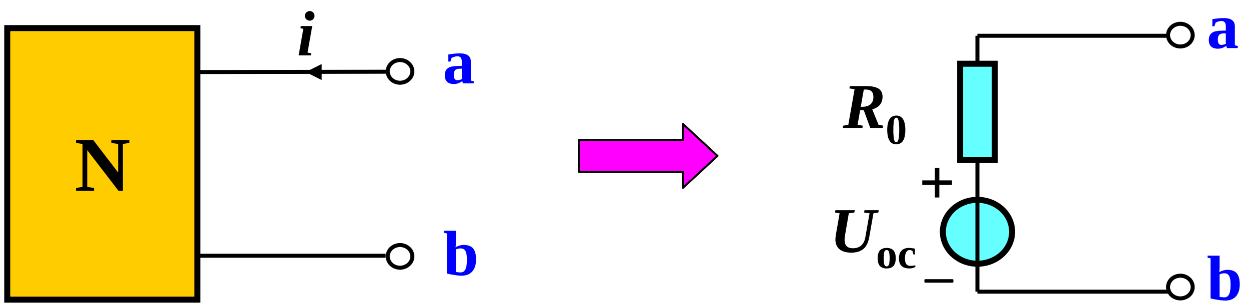
3　戴维南定理和诺顿定理 (*Thevenin*-*Norton Theorem*)



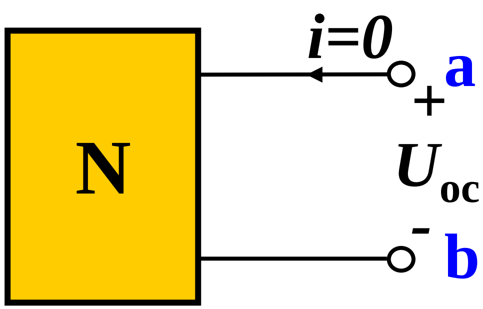
工程实际中，常常碰到只需研究某一支路的情况。这时，可以将除我们需保留的支路外的其余部分的电路(通常为二端网络或称单口网络),等效变换为较简单的含源支路 (电压源与电阻串联或电流源与电阻并联支路),可大大方便我们的分析和计算。戴维南定理和诺顿定理正是给出了等效含源支路及其计算方法。

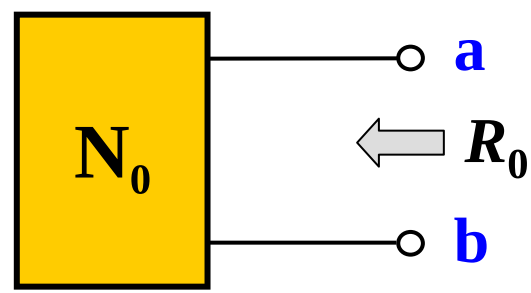
1. 戴维南定理:

任何一个含有独立电源、线性电阻和线性受控源的线性二端网络，对外电路来说，可以用一个理想电压源(U_{oc})和电阻R_0的串联组合来等效；此等效电压源的电压等于该二端网络的端口开路电压U_{oc} ，而等效电阻等于该二端网络中所有独立源置零后的输入电阻。



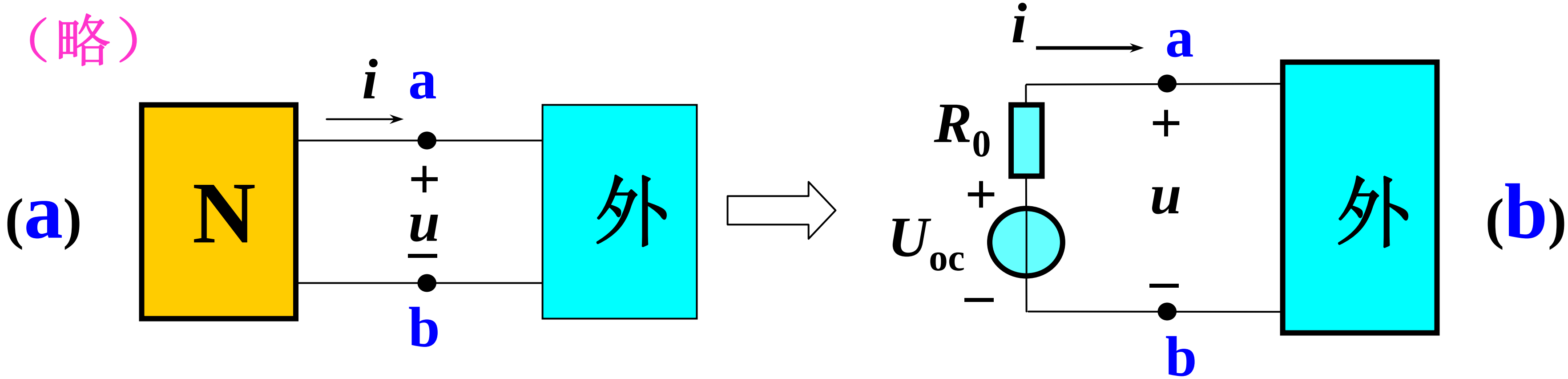
其中：



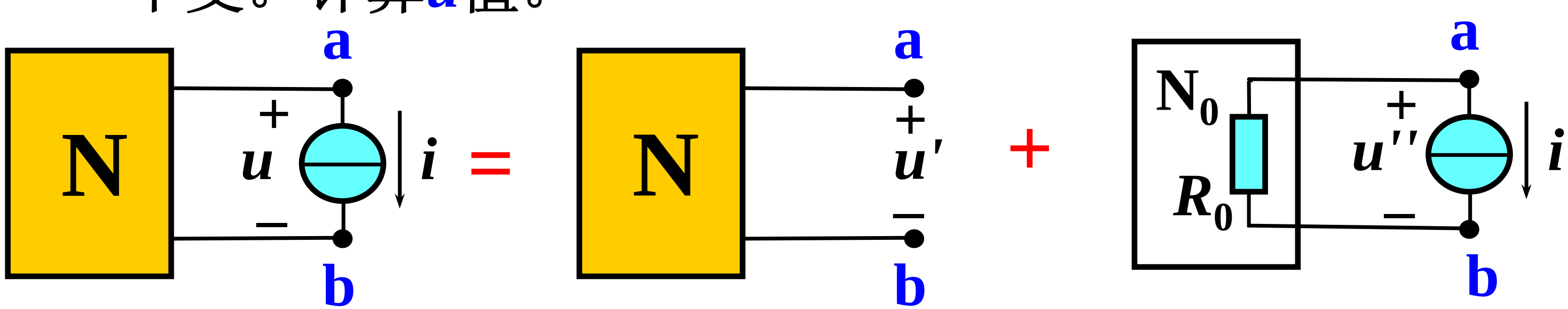


N_0为将N中所有独立源置零后所得无源二端网络。

证明:（略）



(对a) 利用替代定理，将外部电路用电流源替代，此时u，i值不变。计算u值。



电流源i为零　　网络N中独立源全部置零

根据叠加定理，可得

$$\begin{cases} u' = U_{oc} & \text{(外电路开路时a、b间开路电压)} \\ u'' = -R_0 i & \end{cases}$$

则 $u = u' + u'' = U_{oc} - R_0 i$　　此关系式恰与图(b)电路相同。证

小结：

(1) 等效电压源极性与所求U_{oc}方向有关。

(2)等效电阻的计算方法：

1 当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联的方法计算；

2 外加电源法。

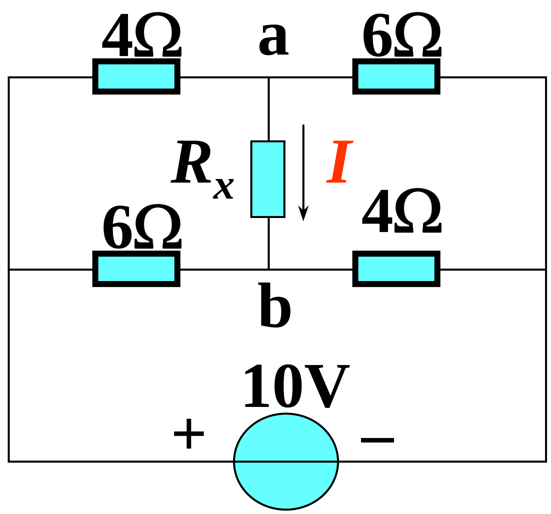
3 开路电压、短路电流法。

2 3 方法更有一般性。

(3) 外电路改变时，含源单口网络的等效电路不变。

(4) 当单口网络内部含有受控源时，其控制电路也必须包含在被等效的单口网络中。

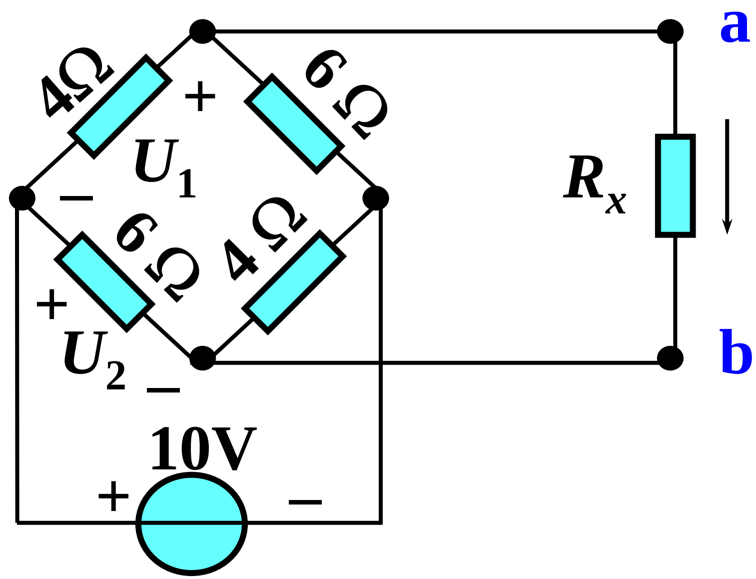
例.

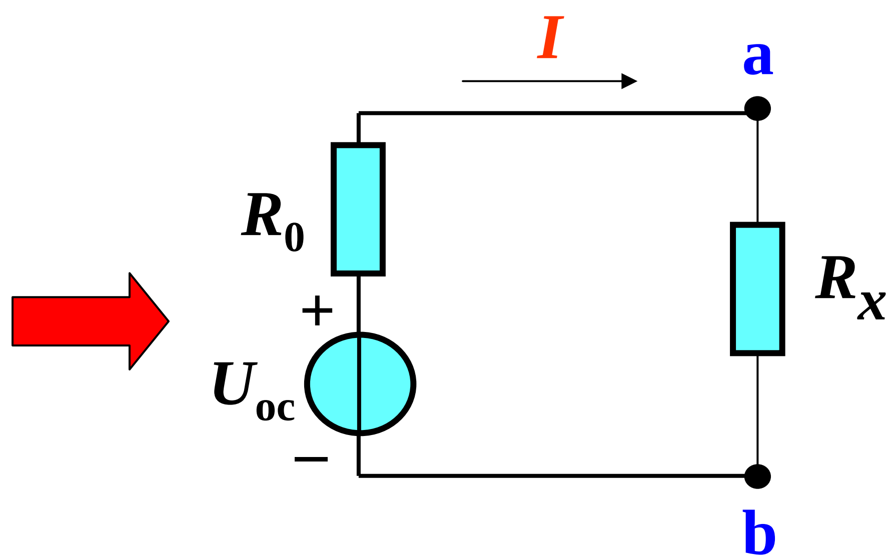


(1) 计算R_X分别为1.2Ω、5.2Ω时的I;

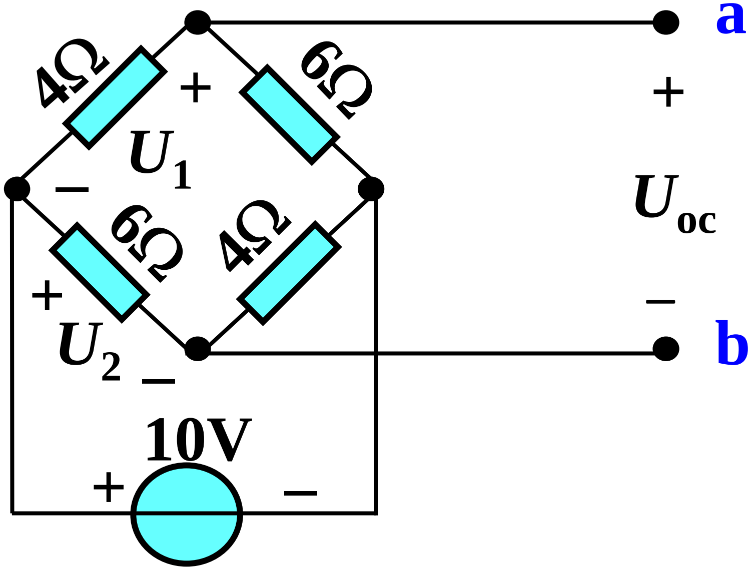
(2) R_X为何值时，其上可获最大功率?

解: 保留R_X支路，将其余单口网络化为戴维南等效电路:



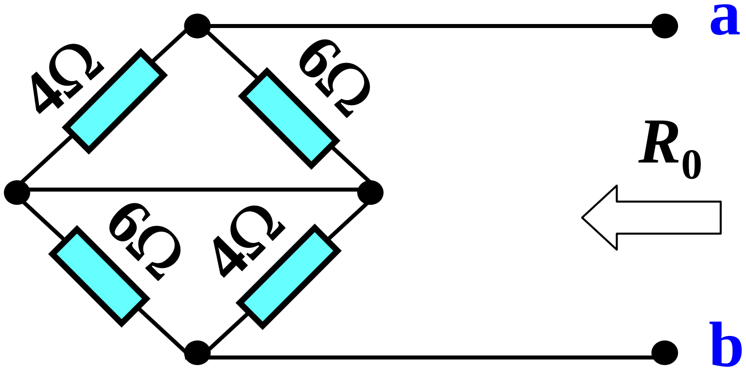


(1) 求开路电压U_{oc}



$$U_{oc} = U_1 + U_2$$
$$= -10\times 4/(4+6)+10\times 6/(4+6)$$
$$= -4+6=2\text{V}$$

(2) 求等效电阻R_0



R_0=4//6+6//4=4.8Ω

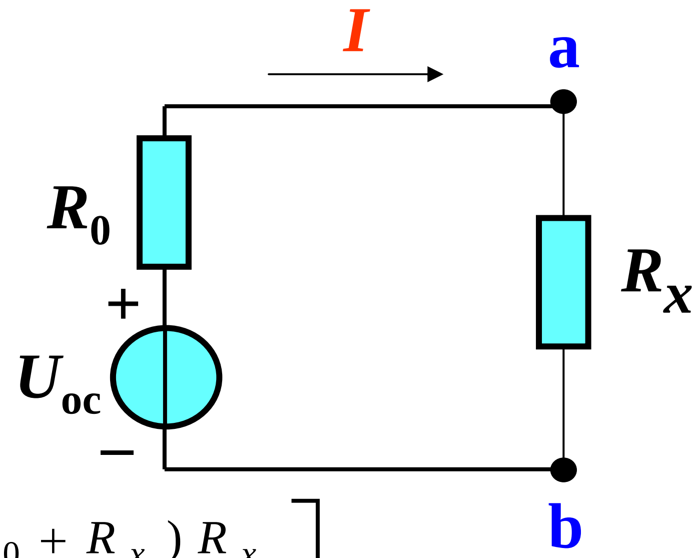
(3) R_X =1.2Ω时，

$I= U_{oc}/(R_0 + R_X) =2/6=0.333\text{A}$

R_X =5.2Ω时，

$I= U_{oc}/(R_0 + R_X) =2/10=0.2\text{A}$

（4） 求R_x获最大功率的条件。



$$P_x = \left(\frac{U_{oc}}{R_0+R_x}\right)^2 \times R_x$$

为了求R_x获最大功率的条件，令：

$$\frac{dP_x}{dR_x} = U_{oc}^2\left[\frac{(R_0+R_x)^2 - 2(R_0+R_x)R_x}{(R_0+R_x)^4}\right]$$

$$= \frac{U_{oc}^2(R_0-R_x)}{(R_0+R_x)^3} = 0$$

得：

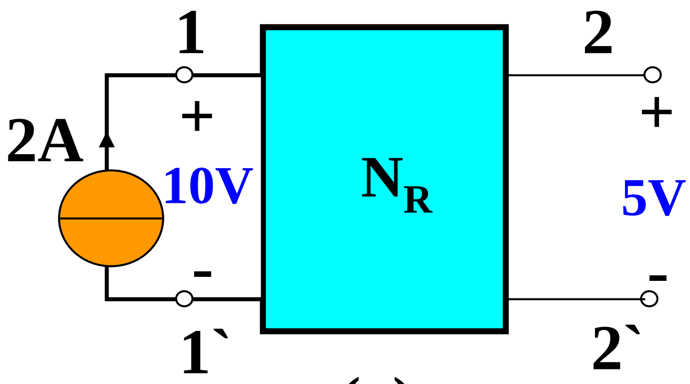
$R_x = R_0$ （负载匹配条件） $P_{xmax}=U^2_{oc}/4R_0$

上式又称最大功率传输定理

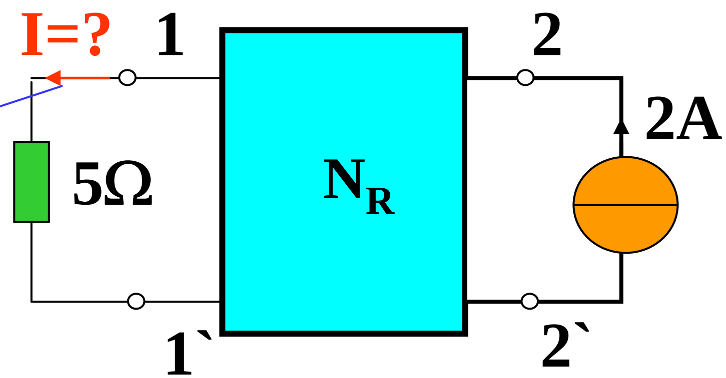
对本例，即当$R_x = R_0$ =4.8Ω时，其上可获最大功率。

例：由图(a)中条件求图(b)中电流I=？(N_R为互易双口网络)

（利用戴维南定理和互易定理）

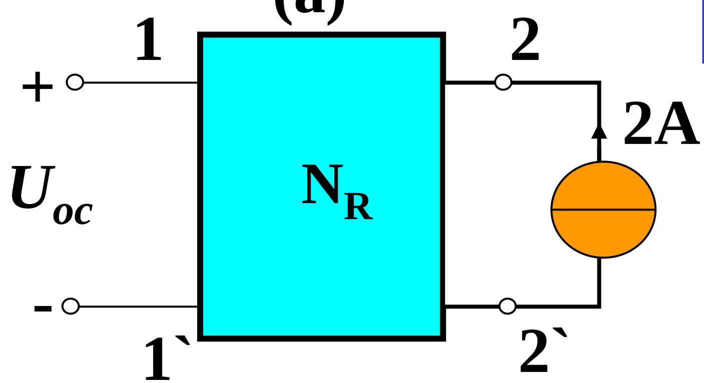


(a)

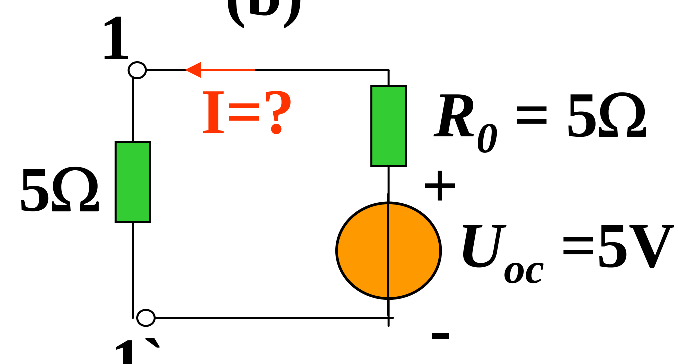


(b)

答案:
I=0.5A



(c)



(d)

解：在(a)中，N_R的11`端输入电阻R_0=10/2= 5Ω 。

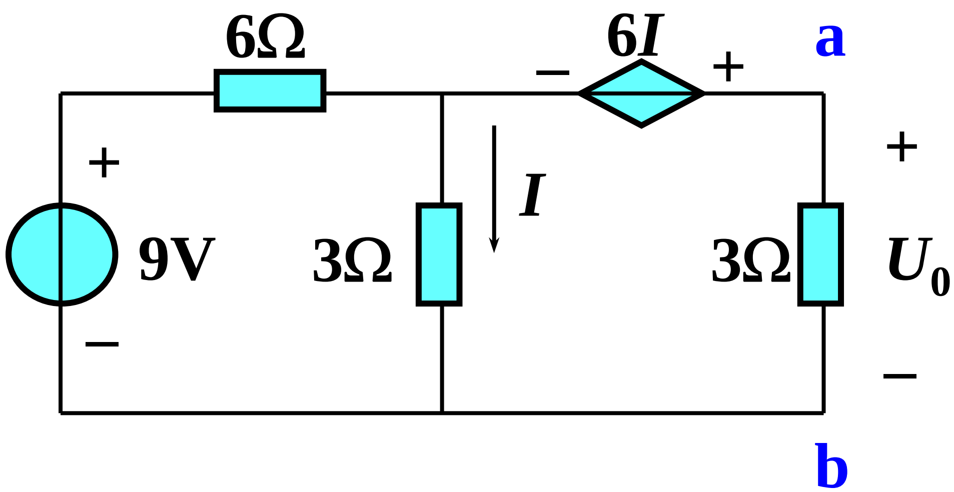
且有(c)图中11`端开路电压U_{oc} =5V 。

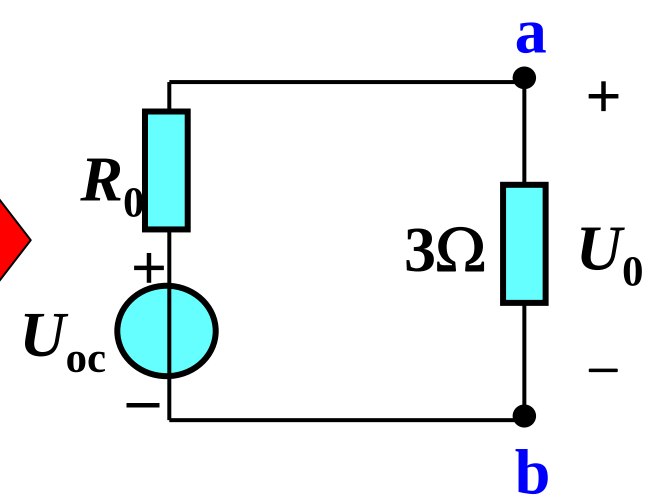
作(c)图中11`端以右的戴文南等效电路（d）

含受控源电路戴维南定理的应用

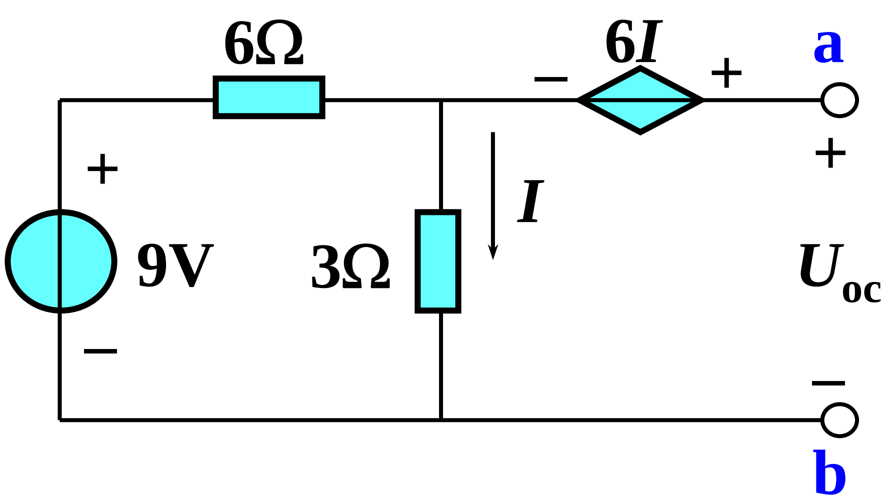
例.

求U_0。





解: (1) 求开路电压U_{oc}

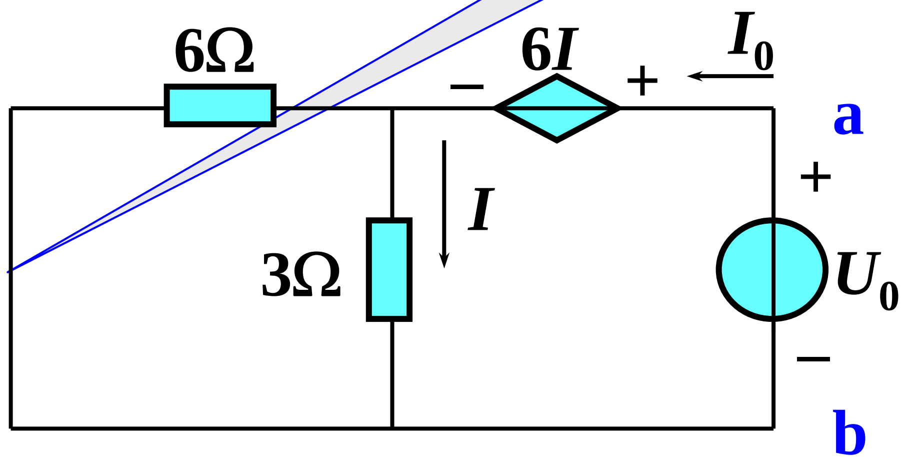


$$\begin{cases} U_{oc}=6I+3I \\ I=9/9=1\text{A} \end{cases} \Rightarrow U_{oc}=9\text{V}$$

(2) 求等效电阻R_0

内部独立源置零

方法1：外加电源法

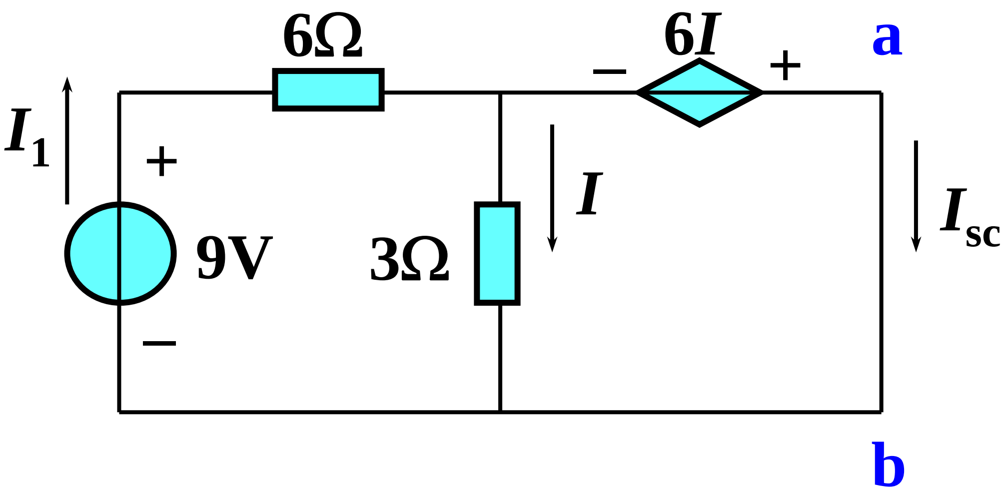


$$\begin{cases} U_0=6I+3I=9I \\ I=I_0\times 6/(6+3)=(2/3)I_0 \end{cases}$$

➡ $U_0=9\times(2/3)I_0=6I_0$

➡ $R_0=U_0/I_0=6\ \Omega$

方法2：开路电压、短路电流法



(U_{oc}=9V　已求得)

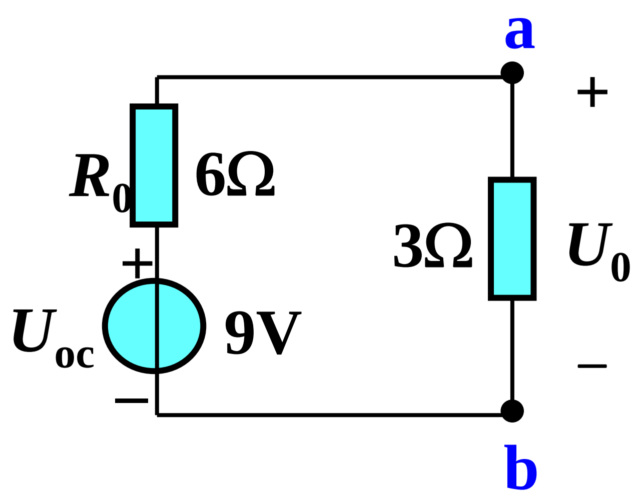
$6I_1+3I=9$

$3I=-6I$ ➡ $I=0$

$I_{sc}=9/6=1.5\text{A}$

$R_0=U_{oc}/I_{sc}=9/1.5=6\ \Omega$

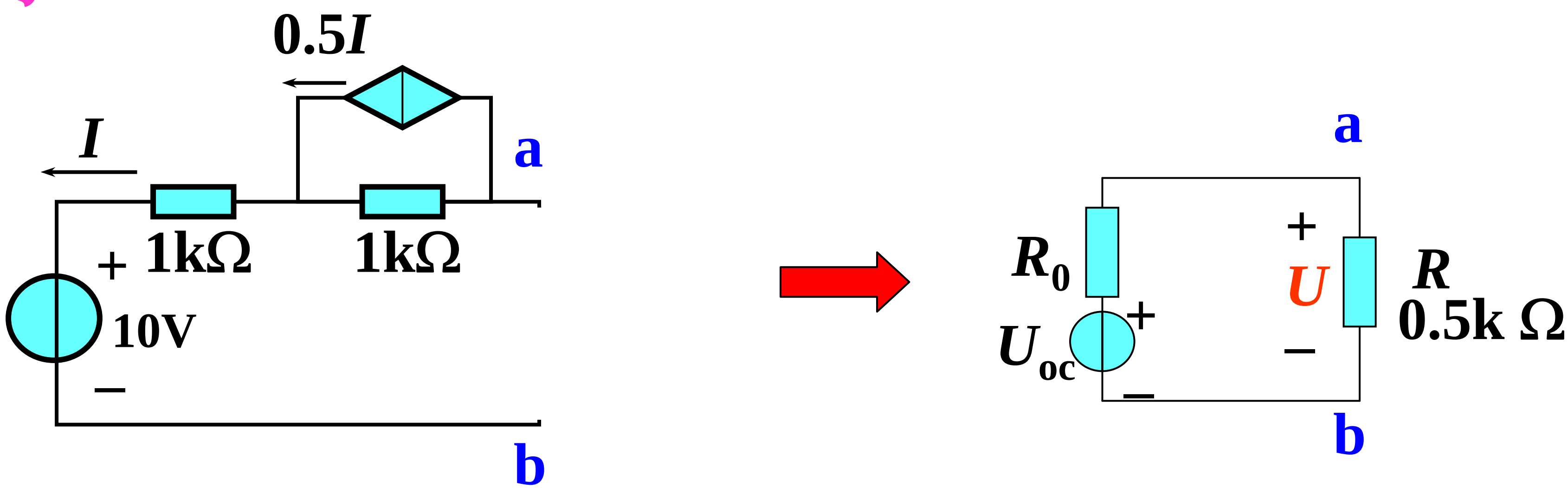
(3) 等效电路



$$U_0 = \frac{3}{6+3} \times 9 = 3\text{V}$$

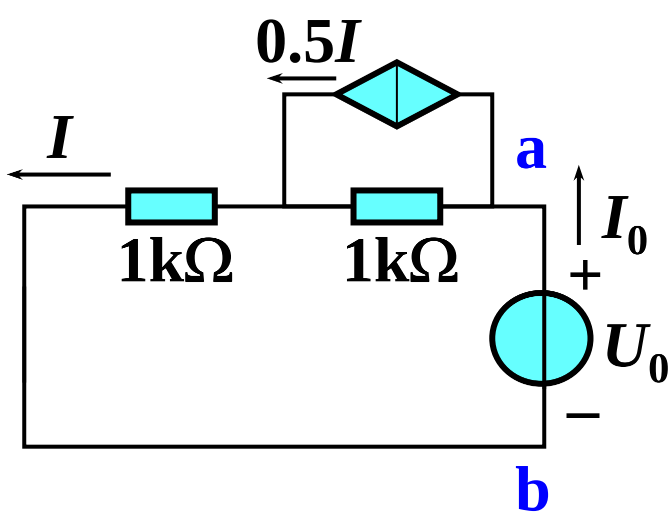
思考：外加电源法与开路电压短路电流法的区别

例. (含受控源电路)用戴维南定理求U。



解：(1) a、b开路，I=0，U_{oc}= 10V

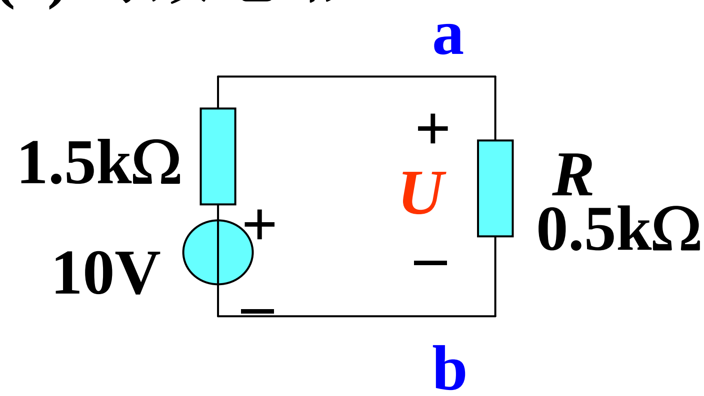
(2)求R_0：加压求流法(内部独立源置零)



$$U_0 =(I_0-0.5\ I_0)\times10^3+ I_0\times10^3 =1500I_0$$

$$\Rightarrow R_0 = U_0 / I_0 =1.5\text{k}\Omega$$

(3) 等效电路：



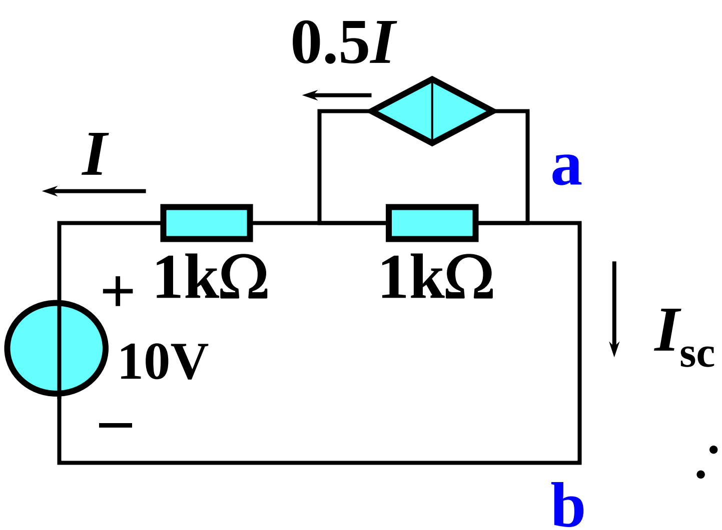
$U=U_{oc}\times 500/(1500+500)=2.5\text{V}$

另： 开路电压U_{oc}、短路电流I_{sc}法求R_0：

$R_0 = U_{oc} / I_{sc}$

U_{oc} =10V（已求出）

求短路电流I_{sc} (将a、b短路)：



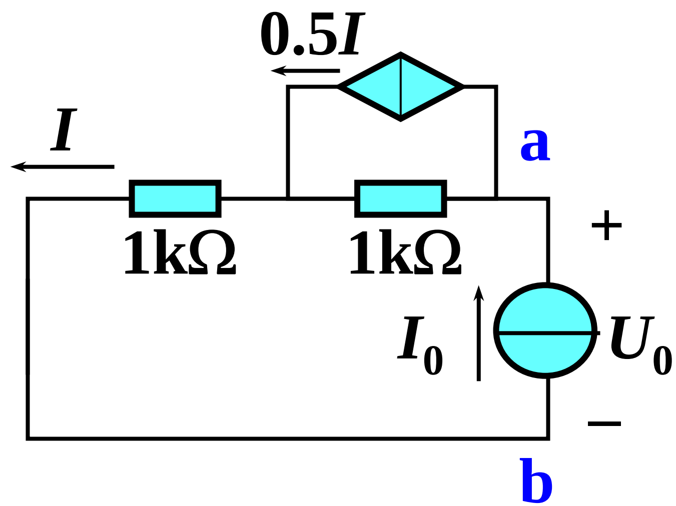
$I_{sc} = -I$，$(I-0.5I)\times 10^3 + I\times 10^3+10=0$

$1500I= -10 \rightarrow I= -1/150$ A

即 I_{sc}=1/150 A

$\therefore R_0 = U_{oc} / I_{sc} =10 \times 150=1500\ \Omega$

加流求压法求R_0　　(内部独立源置零)



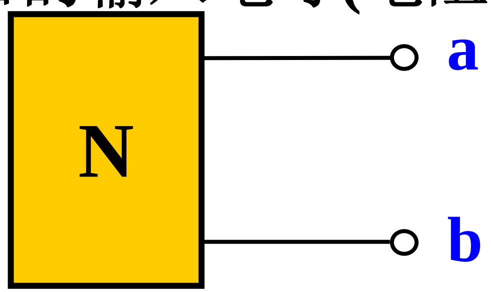
$$I = I_0$$

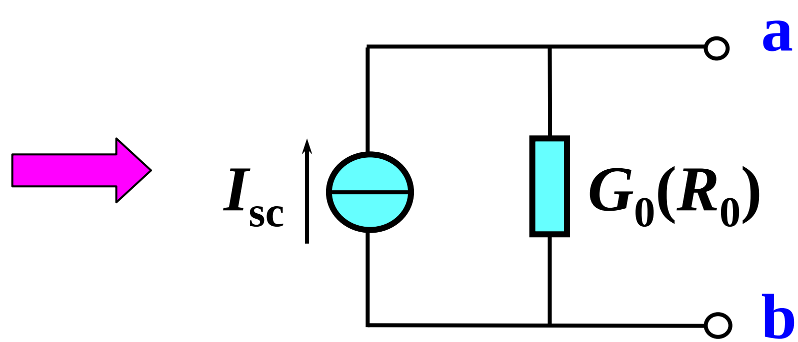
$$U_0 = 0.5I_0 \times 10^3 + I_0 \times 10^3 = 1500I_0$$

$$\therefore\ R_0 = U_0 / I_0 = 1500\ \Omega$$

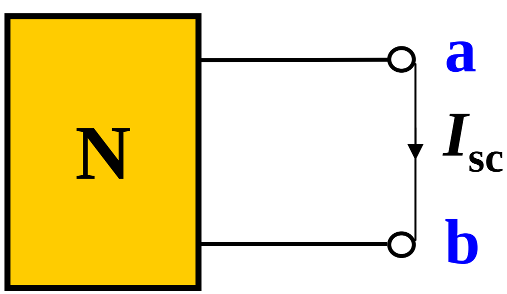
2. 诺顿定理：

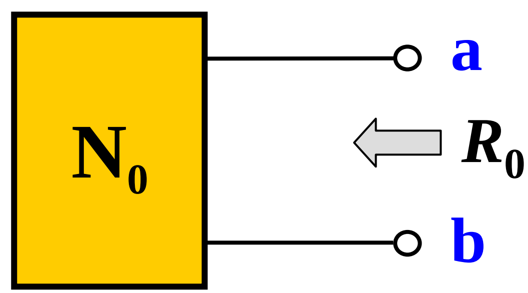
任何一个含独立电源、线性电阻和线性受控源的单口网络N，对外电路来说，可以用一个电流源和电导(电阻)的并联组合来等效；电流源的电流等于该单口网络的端口短路电流I_{sc}，而并联电导(电阻)等于把该单口网络的所有独立源置零后的输入电导(电阻)。





其中：

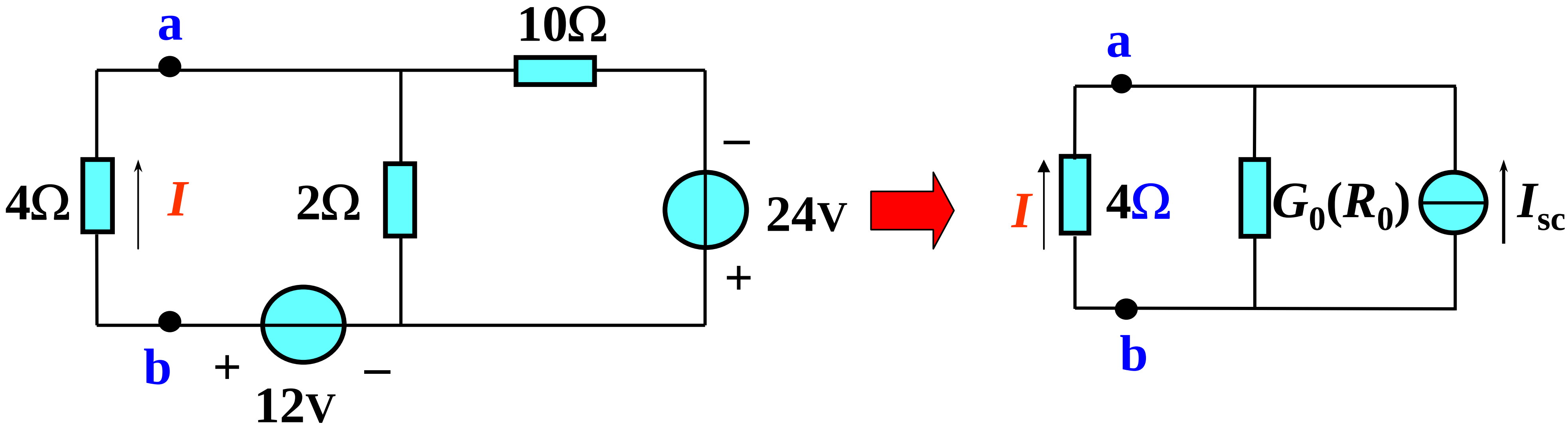




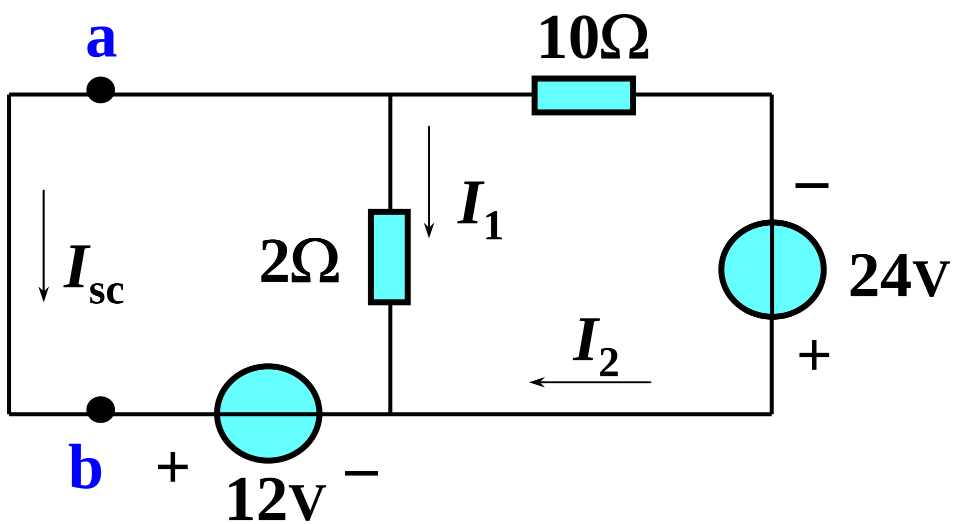
N_0为将N中所有独立源置零后所得无源二端网络。

诺顿等效电路可由戴维南等效电路经电源等效变换得到。但须指出，诺顿等效电路可独立进行证明。证明过程从略。

例. 试用Norton定理求电流I 。



解: (1)求I_{sc}

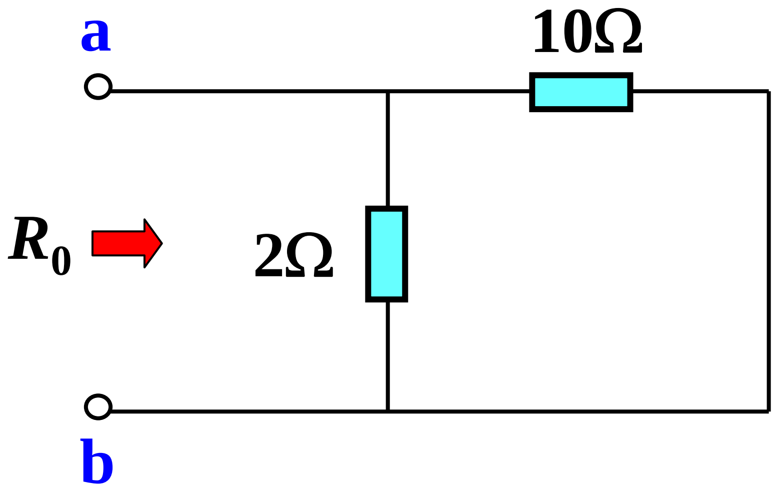


$$I_1 = 12/2 = 6\text{A}$$

$$I_2 = (24+12)/10 = 3.6\text{A}$$

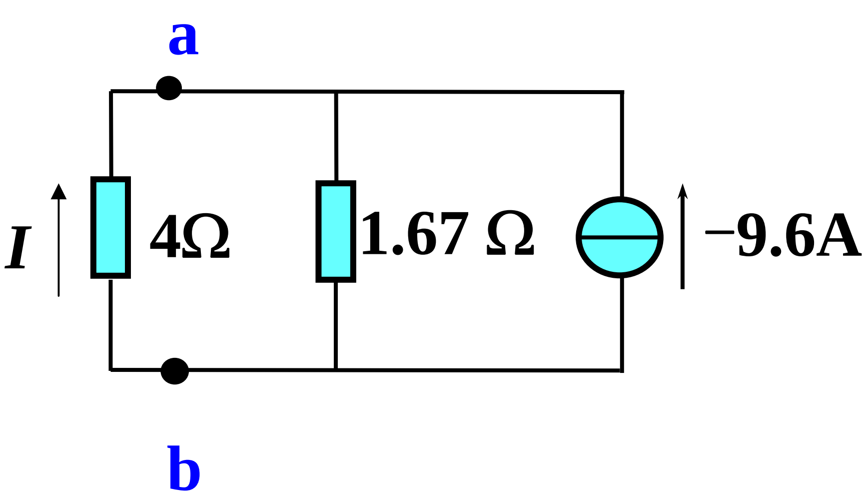
$$I_{sc} = -I_1 - I_2 = -3.6 - 6 = -9.6\text{A}$$

(2) 求R_0：串并联



R_0 =10×2/(10+2)=1.67 Ω

(3) 诺顿等效电路:



$I = -I_{sc}$×1.67/(4+1.67)

=9.6×1.67/5.67

=2.83A

解毕！

小结：

几个定理的适用条件：

1. 叠加定理：适用于线性网络（可含独立源和线性受控源）

2. 替代定理：适用于线性和非线性网络。

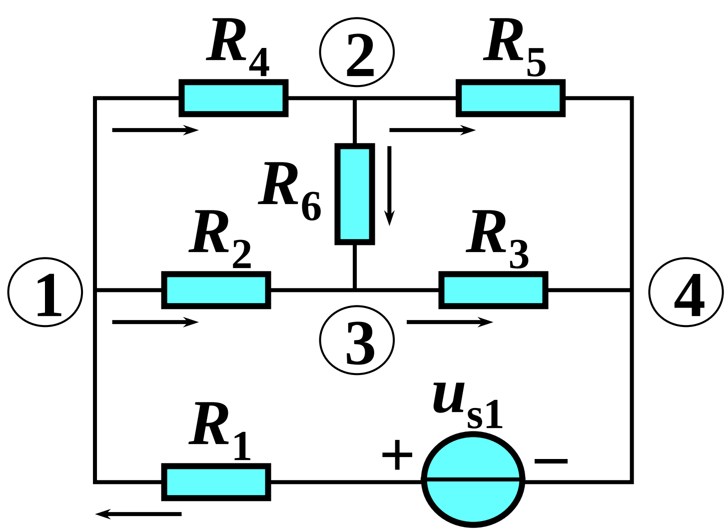
3. 互易定理：只适用于不含独立源和受控源的线性网络。

4. 戴文南、诺顿定理：适用于线性网络。

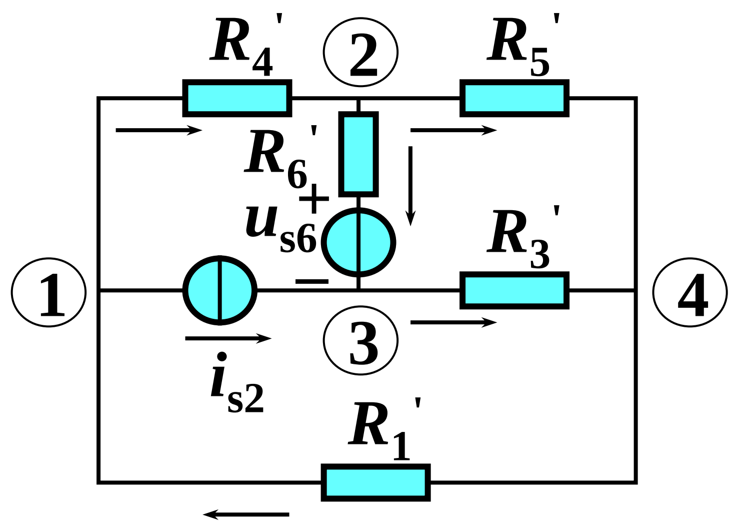
4 特勒根定理(*Tellegen's Theorem*)

1.具有相同拓扑结构（特征）的电路

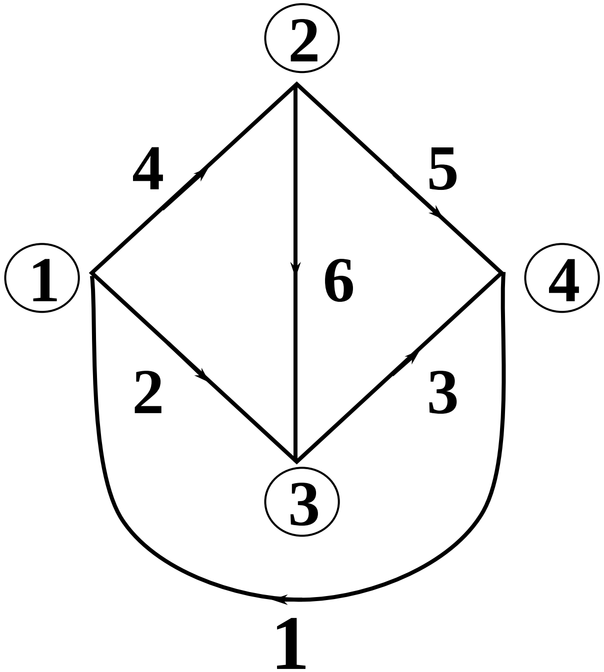
两个电路，支路数和节点数都相同，而且对应支路与节点的联接关系也相同。



N



$\hat{N}$



两个电路支路与节点联接关系相同：

假设两个电路中对应支路电压方向相同，支路电流均取和支路电压相同的参考方向。

2. 特勒根定理：

电路$N(\hat{N})$的所有支路中的每一支路的电压$u_k(\hat{u}_k)$

与电路$\hat{N}(N)$中对应的支路中的$\hat{i}_k(\hat{i}_k)$的乘积之和为零

(且各支路取关联方向), 即

$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \qquad (似功率平衡关系)$$

3. 功率平衡定理:

在任一瞬间，任一电路中的所有支路所吸收的瞬时功率的代数和为零，即

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} p_k = \sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0}$$

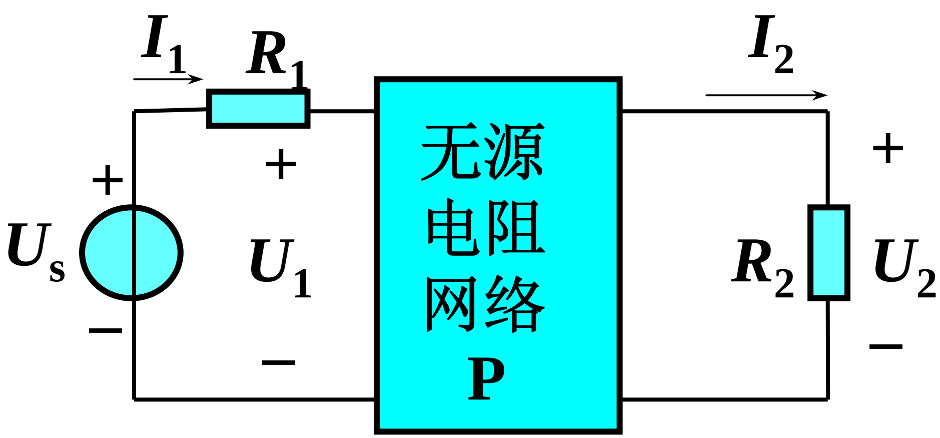
将特勒根定理用于同一电路中各支路电流、电压即可证得上述关系。 (亦可视为 N，$\hat{N}$ 为同一电路 ，则$u_k = \hat{u}_k$，$i_k = \hat{i}_k$.)

此亦可认为特勒根定理在同一电路上的表述。

注意:

特勒根定理适用于一切集总参数电路。只要各支路u，i满足KCL,KVL即可。特勒根定理与KCL,KVL三者中取其两个即可。

例1：



(1) $R_1=R_2=2\Omega$, $U_s=8V$ 时，$I_1=2A$, $U_2=2V$

(2) $R_1=1.4\ \Omega$, $R_2=0.8\Omega$, $U_s'=9V$时，$I_1'=3A$,

求U_2'。

解：利用特勒根定理

由(1)得：$U_1=4V, I_1=2A, U_2=2V, I_2=U_2/R_2=1A$

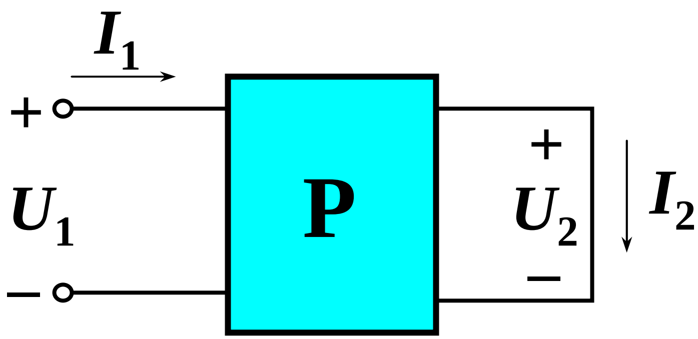
由(2)得：$\hat{U}_1=4.8V, \hat{I}_1=3A, \hat{I}_2=\hat{U}_2/R_2=(5/4)\hat{U}_2$

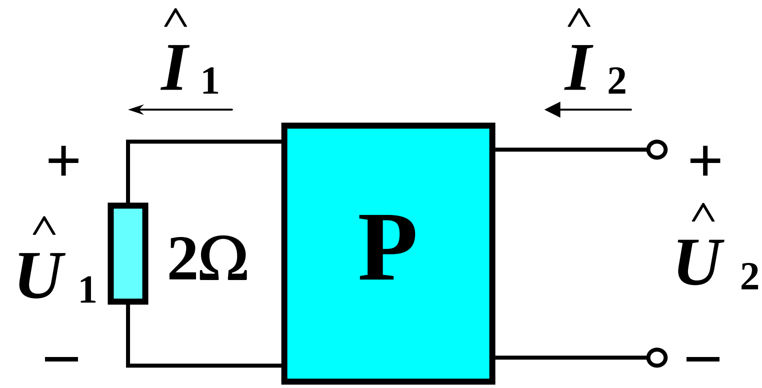
$$U_1(-\hat{I}_1)+U_2\hat{I}_2=\hat{U}_1(-I_1)+\hat{U}_2 I_2$$

(负号是因为 U_1, I_1的方向不同)

$$-4\times3+2\times1.25\hat{U}_2=-4.8\times2+\hat{U}_2\times1 \quad\rightarrow\quad \hat{U}_2=2.4/1.5=1.6V$$

例2. 求 $\hat{U}_1$.





$U_1=10\text{V},\ I_1=5\text{A},\ U_2=0,\ I_2=1\text{A}$

$\hat{U}_2 = 10\text{V}$

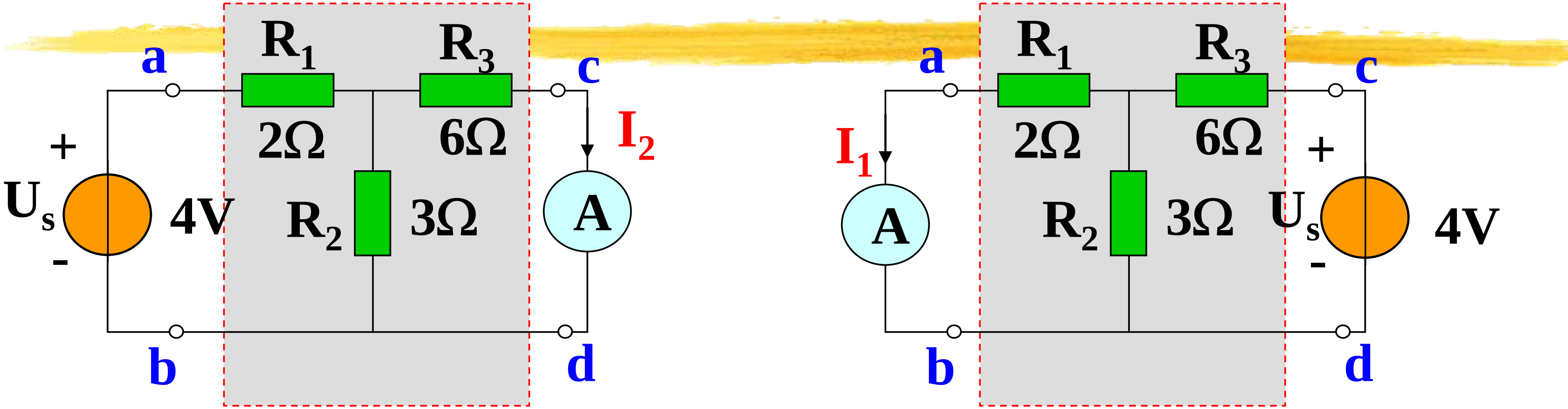
解:

$$\begin{cases} U_1\hat{I}_1 + U_2(-\hat{I}_2) = \hat{U}_1(-I_1) + \hat{U}_2 I_2 \\ \hat{U}_1 = 2\hat{I}_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{U}_1 = 1\text{V}.$

5 互易定理 (*Reciprocity Theorem*)

例:



(a) (b)

对(a): $$I_2=\frac{U_S}{R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}}\times\frac{R_2}{R_2+R_3}=\frac{4}{2+\frac{3\times6}{3+6}}\times\frac{3}{3+6}=\frac{1}{3}(A)$$

对(b): $$I_1=\frac{U_S}{R_3+\frac{R_2R_1}{R_2+R_1}}\times\frac{R_2}{R_2+R_1}=\frac{4}{6+\frac{3\times2}{3+2}}\times\frac{3}{3+2}=\frac{1}{3}(A)$$

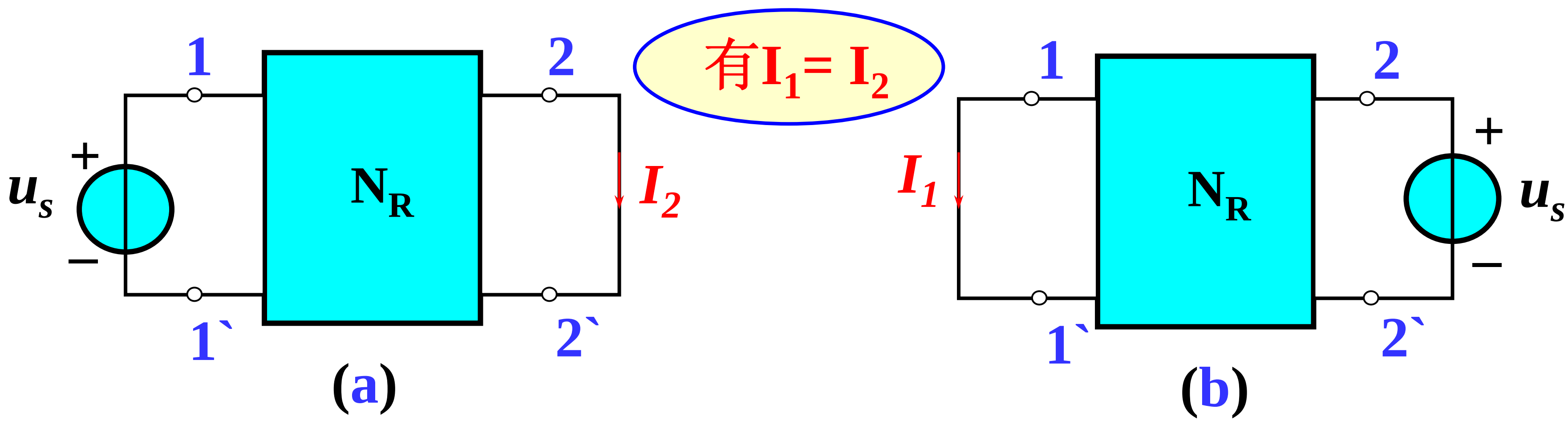
有$I_1 = I_2$ 说明互易性

不含独立源和受控源的线性双口网络，其端口具有互易性。

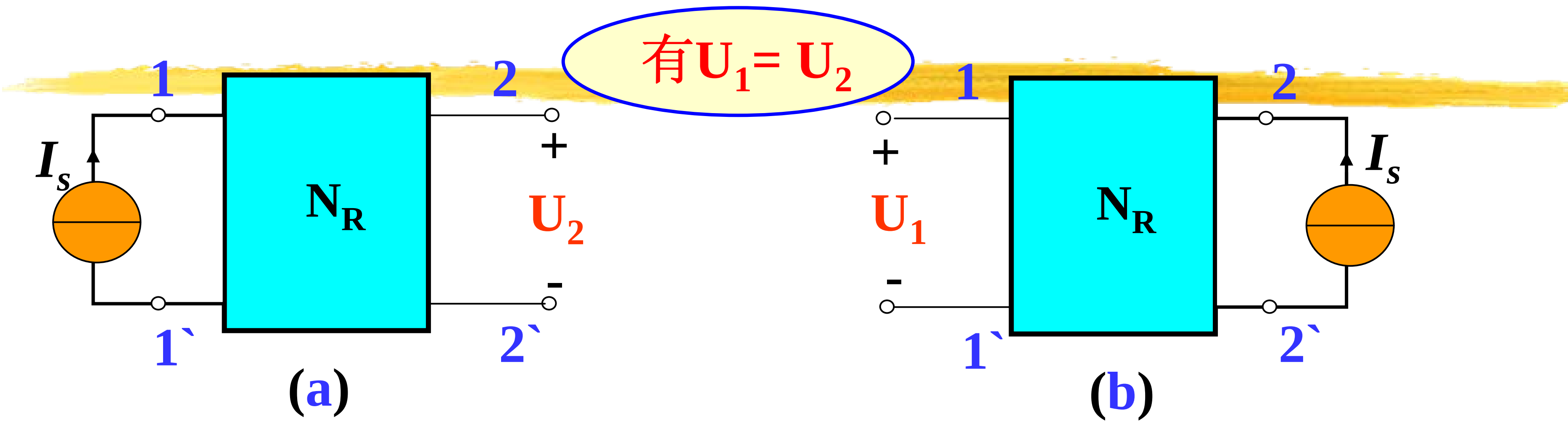
令N_R—表示具有互易性的双口网络。

互易定理：

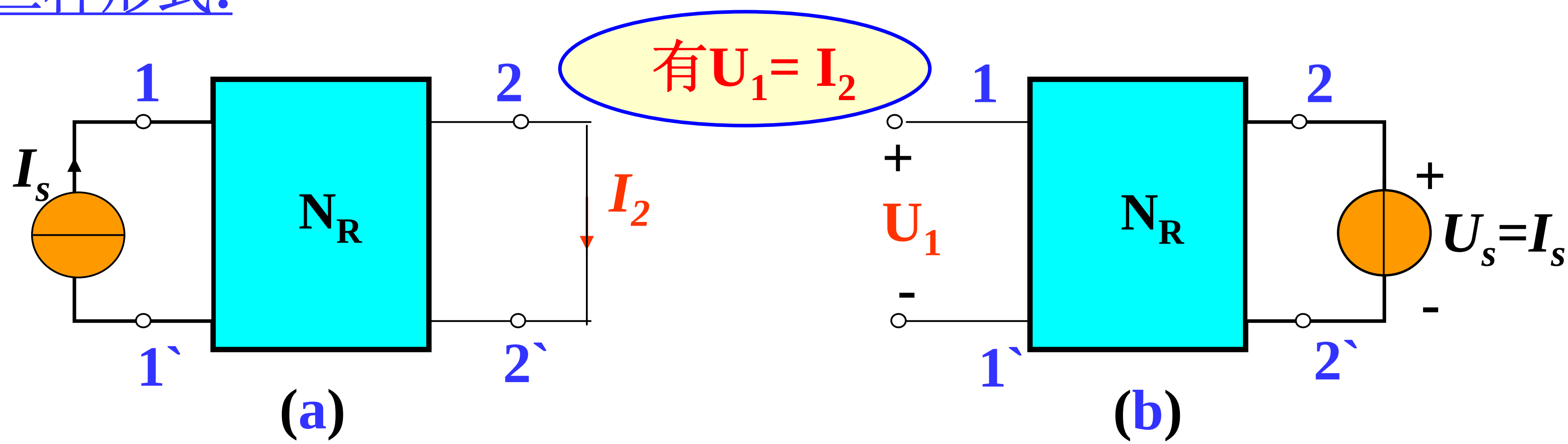
第一种形式： 电压源激励，电流响应。



第二种形式: 电流源激励，电压响应。



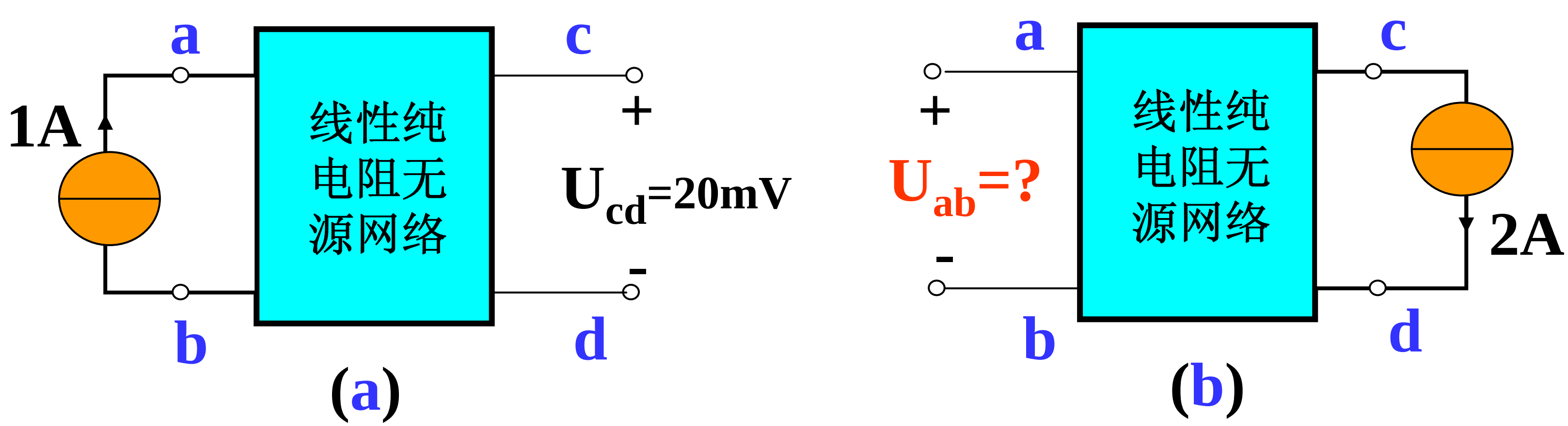
*第三种形式:



即：当U_s数量上等于I_s时，U_1数量上等于I_2

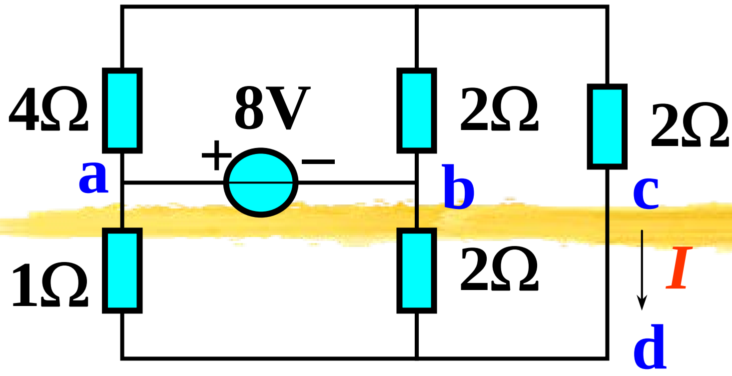
练习:

已知图(a)电路，求图(b)中开路电压U_{ab}=?



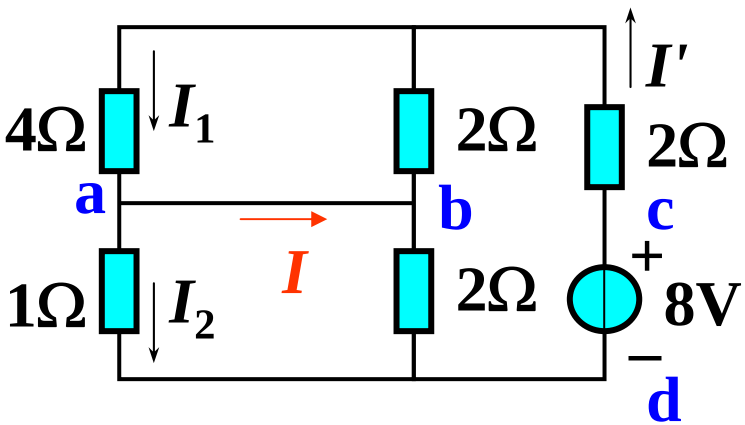
答案：U_{ab}= -40mV

例：



求电流I。

解：利用互易定理



$$I' = \frac{8}{2+4\,/\!/\,2+1\,/\!/\,2} = \frac{8}{4} = 2\text{A}$$

$$I_1 = I' \times 2/(4+2) = 2/3\text{A}$$

$$I_2 = I' \times 2/(1+2) = 4/3\text{A}$$

$$I = I_1 - I_2 = -2/3\text{A}$$

解毕！

应用互易定理时应注意：

(1) 互易定理只适用于不含独立源和受控源的线性网络

(2) 激励为电压源时，响应为电流
激励为电流源时，响应为电压 } 电压与电流互易。

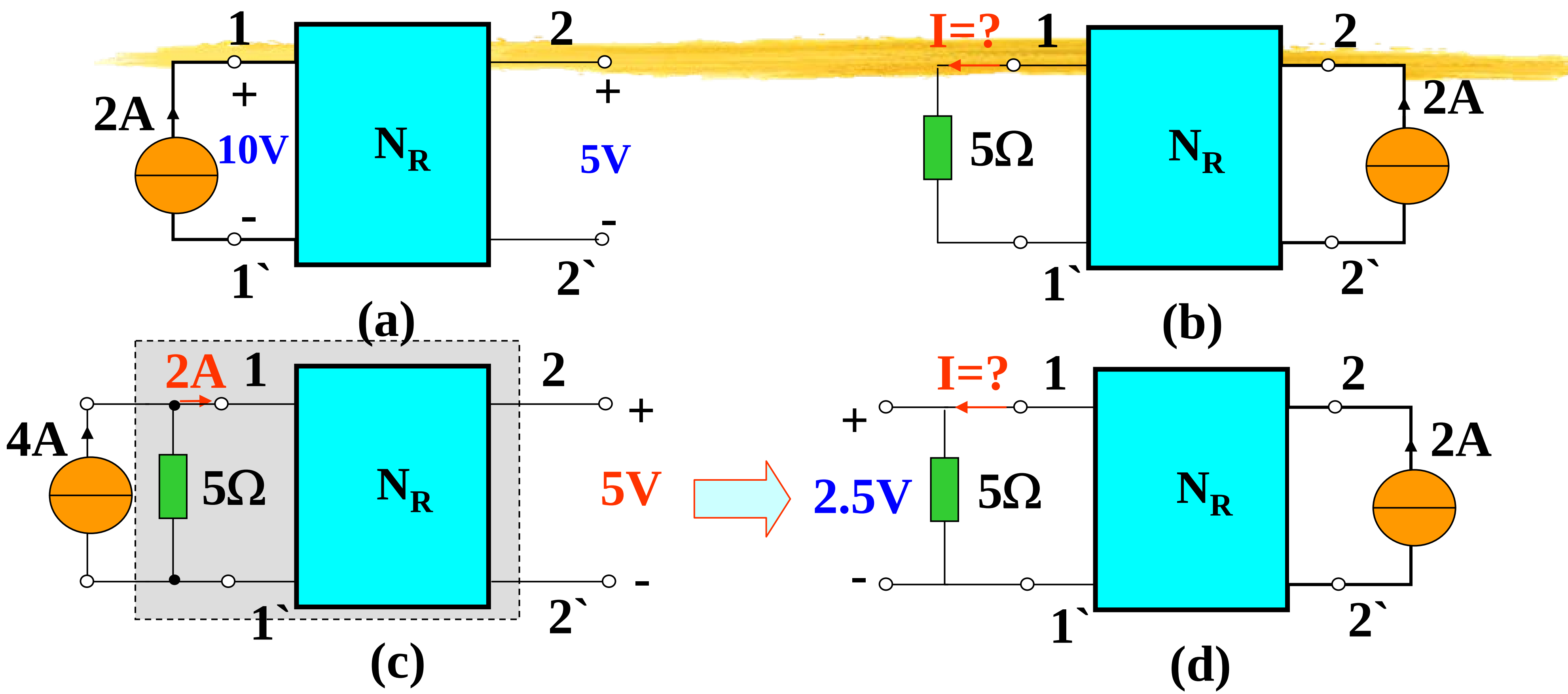
(3) 互易前后要注意激励与响应的参考方向。（如何判断？）

(4) 含有受控源的网络，互易定理一般不成立。

(5) 互易前后网络内部电压、电流一般会发生改变。

例：由图(a)中条件求图(b)中电流I=？(N_R为互易双口网络）

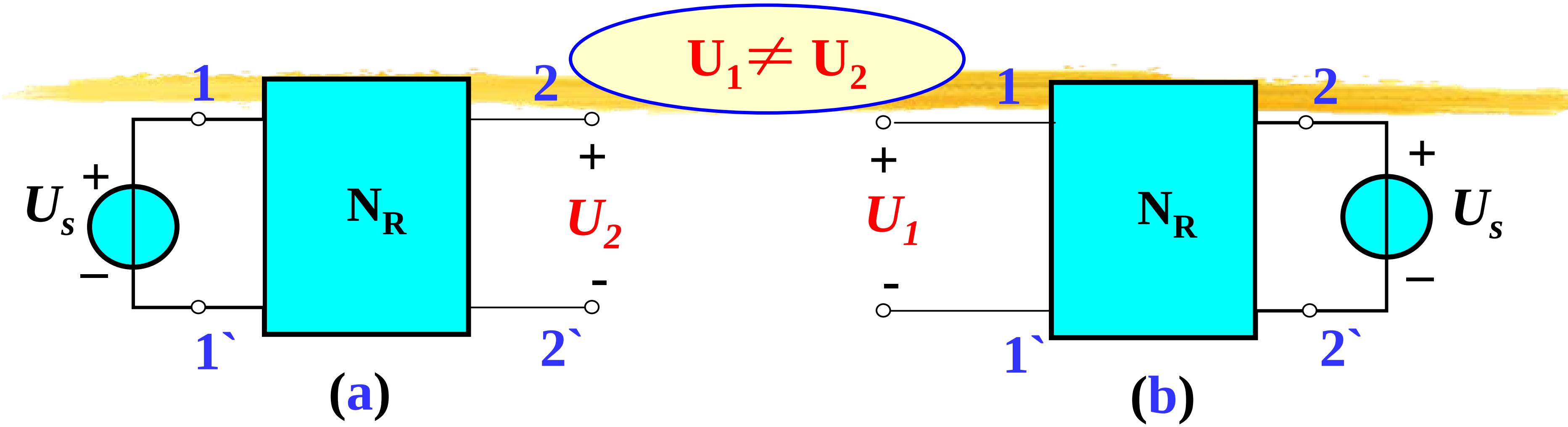
（互易定理、替代定理及叠加定理综合应用）

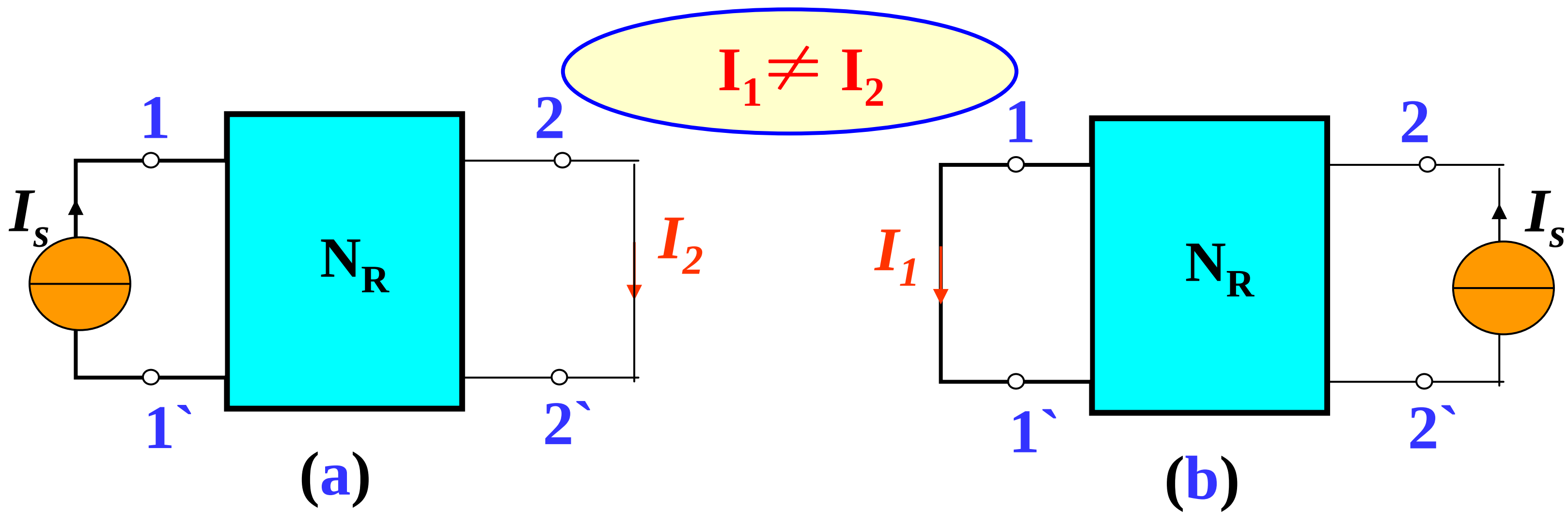


解： (a)中，N_R的11` 端输入电阻R=10/2= 5Ω， 故有(c)图成立。

答案：I=2.5/5=0.5A

两种错误应用互易定理的例子：

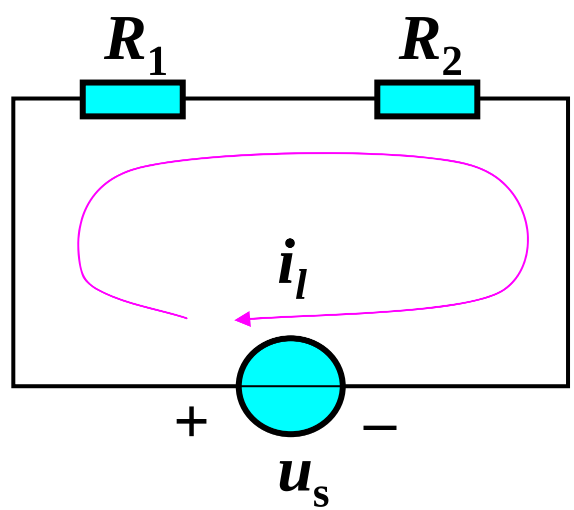


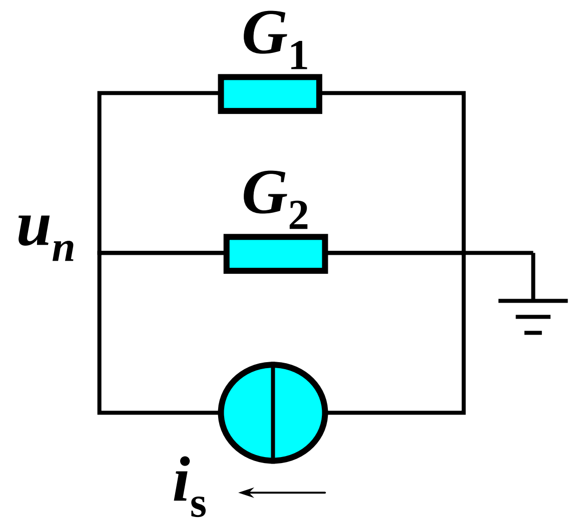


6　对偶原理 (*Dual Principle*)

1. 对偶电路:

例1.





网孔电流方程:

$$(R_1 + R_2)i_l = u_s$$

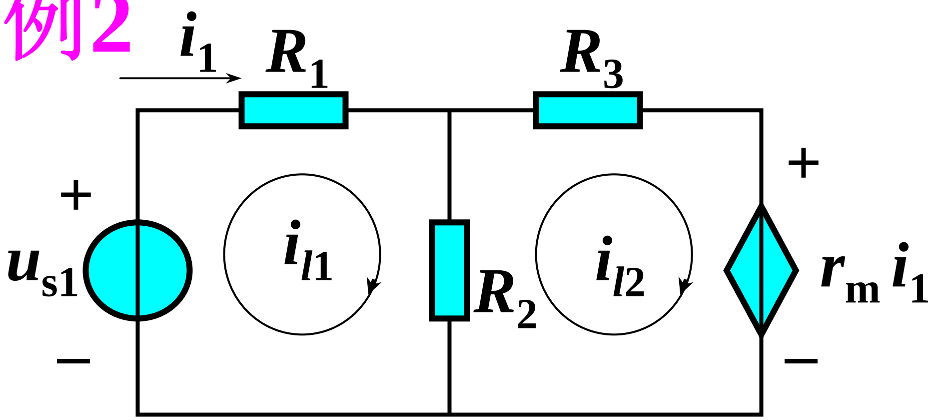
节点电压方程:

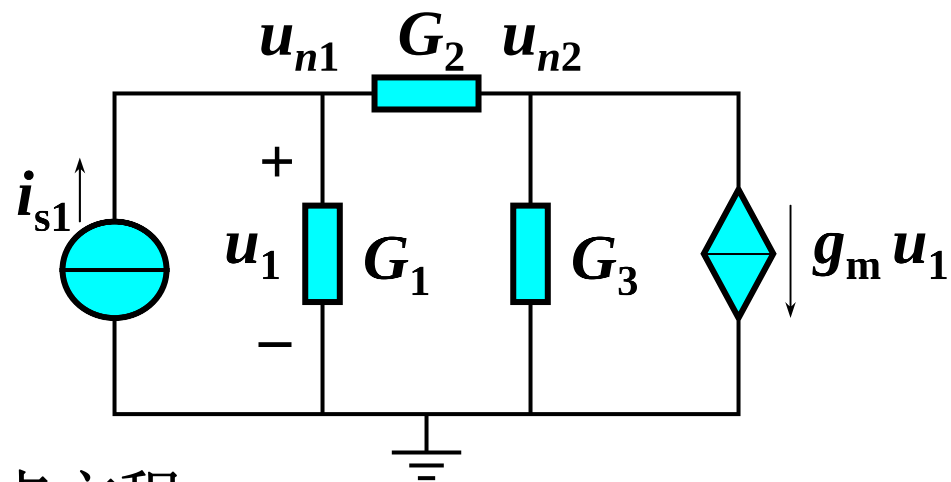
$$(G_1 + G_2)u_n = i_s$$

若R_1=G_1，R_2=G_2，u_s=i_s，

则两方程完全相同，解答i_l=u_n也相同。

例2





网孔方程：

$$(1)\quad \begin{cases} (R_1+R_2)\, i_{l1} - R_2\, i_{l2} = u_{s1} \\ -R_2\, i_{l1} + (R_2+R_3)\, i_{l2} = -r_m i_1 \\ i_1 = i_{l1} \end{cases}$$

节点方程：

$$(2)\quad \begin{cases} (G_1+G_2)u_{n1} - G_2\, u_{n2} = i_{s1} \\ -G_2\, u_{n1} + (G_2+G_3)\, u_{n2} = -g_m u_1 \\ u_1 = u_{n1} \end{cases}$$

若$R_1=G_1$, $R_2=G_2$, $R_3=G_3$, $u_{s1}=i_{s1}$, $r_m=g_m$，则两个方程组相同，其解答也相同，即$u_{n1}=i_{l1}$，$u_{n2}=i_{l2}$。

上述每例中的两个电路称为对偶电路。

将方程(1)中所有元素用其对偶元素替换得方程(2)。

2. 对偶元素： （见书）

节点	节点电压	串联	R	L	u_s	CCVS	KCL	• • •
网孔	网孔电流	并联	G	C	i_s	VCCS	KVL	• • •

3. 对偶原理： 两个对偶电路N，$\overline{N}$，如果对电路N有命题（或陈述）S成立，则将S中所有元素，分别以其对应的对偶元素替换，所得命题（或陈述）$\overline{S}$对电路$\overline{N}$成立。

注意： 只有平面电路才可能有对偶电路。

4. 如何求一个电路的对偶电路

打点法：网孔电流对应节点电压(外网孔对应参考节点)。

注意:

(1) 每一网孔电流对应一节点电压，外网孔对应参考节点。网孔电流取顺时针方向，节点电压指向参考节点。

(2) 各对偶元素进行替换。($i_1 \sim u_1$)数值相同，量纲不同。

(3) 电源方向：电压源电压方向与网孔电流方向相同时，对应电流源方向为离开对应节点，反之相反。电流源方向与网孔电流方向相同时，对应电压源方向与对应节点电压方向相同，反之相反。